次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

＜ '15 京都大 ＞

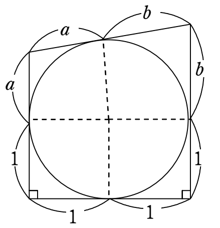
【戦略 1】

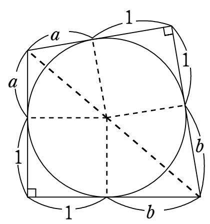
図形量の最小値ですから，変数を導入しましょう。

直角ですから座標を導入しやすいかも … と頭をよぎるかもしれませんが，座標だと単純に接線の公式で式を立てるわけにはいかず，「〇〇の範囲で接する」という「範囲付きの接する条件」ということになりそうなので，少し躊躇してしまいます。

素直に幾何的に ” 長さ ”，もしくは ” 角度 ” の導入をしていきます。

まずは最低 2 つはある直角の位置関係で場合分けします。





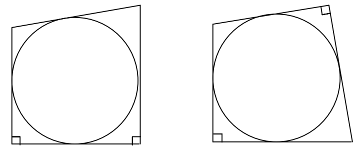
という 2 パターン考えられますが，いずれにせよ，上のように長さを導入して計算を進めていくと，面積 S は $S=a+b+2$ となると思います。

もちろん，この a，b は円が四角形に内接するという条件から従属 2 変数です。

ですから，a，b が満たすべき関係式を Get することに注力しましょう。

【解 1】

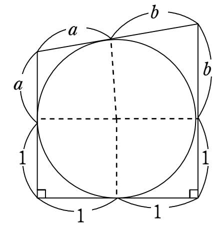
(a) より，右の図の (i)，(ii) のときを調べれば十分である。



(i)　　　(ii)

(i) のとき

右の (図 1) のように a，b ($0<a<b$) と定める。



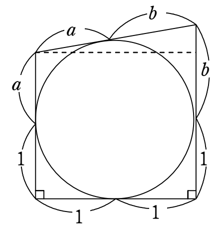
(図 1)

この四角形の面積を S とすると

$$S=\{(1\times1)\times2\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\times a\times1\right)\times2\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\times b\times1\right)\times2\right\}$$
$$=a+b+2$$

ここで，(図 2) において三平方の定理を用いると

$$2^2+\{(b+1)-(a+1)\}^2=(a+b)^2$$



(図 2)

これを整理すると $ab=1$ を得る。

$a>0$ より，$b=\dfrac{1}{a}$ であるため

$$S=a+b+2$$
$$=a+\frac{1}{a}+2$$

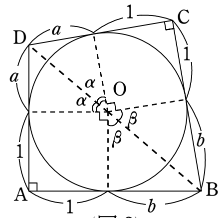
$a>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から $S\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}+2$
$=4$

(等号成立は $a=\dfrac{1}{a}$， すなわち $a^2=1$ で $a>0$ より $a=1$ のとき)

(ii) のとき

(図 3) のように角度 α，β を定めると

$$2\alpha+2\beta+90^\circ+90^\circ=360^\circ$$



(図 3)

より，$\alpha+\beta=90^\circ$

よって，図の B，O，D は同一直線上

この四角形の面積 S は $S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$

$$=\frac{1}{2}\times(1+a)(1+b)+\frac{1}{2}(1+a)(1+b)$$
$$=(1+a)(1+b)$$

一方，この四角形の面積 S は (i) と同じく，$S=a+b+2$ と表される。

よって，$(1+a)(1+b)=a+b+2$ で，$ab=1$ を得る。

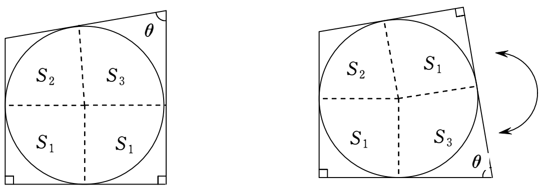
これより，(i) と同じく $ab=1$ を満たす中での $S=a+b+2$ の最小値を求める議論に帰着し，$S\geqq4$ (等号成立は $a=1$，$b=1$ のとき) となる。

以上から，求める最小値は 4 … 答

【戦略 2】(ii) のとき

(ii) のときは少しパズル的な見方をしますが，パーツを入れ替えると，(i) の形に帰着できます。閃き一発の解法です。

【解 2】部分的別解 (ii) のとき



(i)　　　　　　　　(ii)

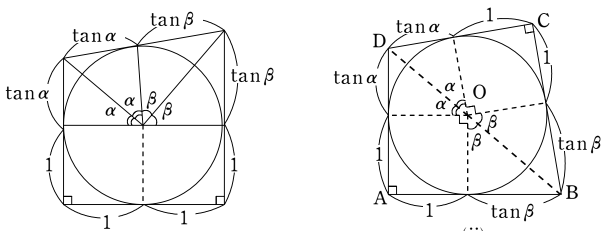
図のように，(ii) において，S_1，S_3 を入れ替えると (i) の図に帰着できるので，(ii) の場合の面積の最小値は (i) の場合と同様に，最小値は 4

【戦略 3】

角度主体でも攻め落とすことができます。

結局は直角の位置によらず，同じ範疇の式でまとまります。

【解 3】



(i)　　　　　　　　(ii)

図のように角度 α，β $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と定めると，(i)，(ii) いずれにせよ四角形の面積 S は

$$S=\tan\alpha+\tan\beta+2$$

となる。

一方，(i)，(ii) いずれにせよ $2\alpha+2\beta+90^\circ\times 2=360^\circ$ より，

$$\alpha+\beta=90^\circ$$

が成立する。

よって，(i)，(ii) の場合はともに $S=\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}+2$ となり，

$\tan\alpha>0$ であるから相加平均・相乗平均の関係から

$$S\geqq 2\sqrt{\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}}+2=4$$

等号成立は $\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$，$\tan\alpha>0$ を考えると $\tan\alpha=1$，

すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

以上から S の最小値は 4 … 答

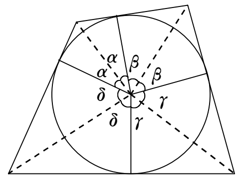
【総括】

図形量の最小を考えるにあたっては何か変数を導入することになります。

大抵，長さか角度かを変数にとって数式化することになるでしょう。

また，幾何，座標，ベクトルのどの分野の問題として考えていくかについても意識することが大切です。

なお，今回の条件 (a) はなくても解くことができます。



図のように α，β，γ，δ を定めます。

$$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2},\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=2\pi$ ですから，

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ …① ということになります。

この四角形の面積を S とすると，$S=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta$ です。

ここで，一般に $0<\theta_1\leqq\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{2}\geqq\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\quad\cdots(☆)$$

が成り立ちます。(等号成立は $\theta_1=\theta_2$ のとき)

これは

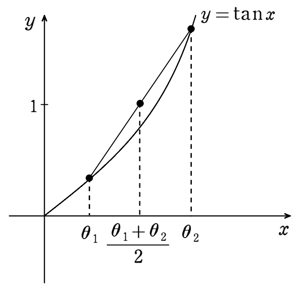
$y=\tan x$ ($=f(x)$ とおく)

の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ におけるグラフが

下に凸であることを利用した不等式

$$\frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{2}\geqq f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

が成立することから従います。



(☆) より，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ …（ア），

$\dfrac{\tan\gamma+\tan\delta}{2}\geqq\tan\dfrac{\gamma+\delta}{2}$ …（イ）

再び (☆) を利用すると $\dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\tan\dfrac{\gamma+\delta}{2}}{2}\geqq\tan\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\gamma+\delta}{2}}{2}$

すなわち，$\dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\tan\dfrac{\gamma+\delta}{2}}{2}\geqq\tan\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$ …(ウ)

$$\frac{1}{2}S=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}+\frac{\tan\gamma+\tan\delta}{2}\underset{(\because(ア),(イ))}{\geqq}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}+\tan\frac{\gamma+\delta}{2}\underset{(\because(ウ))}{\geqq}2\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$$

よって ① より，$\frac{1}{2}S\geqq 2\tan\frac{\pi}{4}$ なので，$S\geqq 4$ を得ることになります。

等号成立は (ア)，(イ)，(ウ) の等号が成立する

$$\alpha=\beta \text{ かつ } \gamma=\delta \text{ かつ } \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\gamma+\delta}{2}$$

すなわち $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ のときで，これは今回の四角形が正方形のときが題意の四角形の面積が最小になることを意味します。