仮想難関大【２次関数～通過点に関する論証～】

2 次関数 $y=f(x)$ は x 軸と異なる 2 つの共有点をもち，その共有点の 1 つが $(2,\ 0)$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ が $(1,\ -2)$，$(-1,\ 6)$ を通るとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=f(x)$ が以下の条件 (i)，(ii) を満たす。

(i) $2\leqq x\leqq 3$ において，$x=2$ で最小，$x=3$ で最大 となる。

(ii) $(9,\ -2)$，$(4,\ -1)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 6)$ のうち 2 点のみを通る。

このとき，$f(x)$ をすべて求めよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) $y=ax^2+bx+c$ **とおいてもよいですが，ここでは** x **切片の情報を活かし，**

$$f(x)=a\,(x-2)(x-\beta)\ \ (a\neq 0,\ \beta\neq 2)$$

とおいて処理したいと思います。

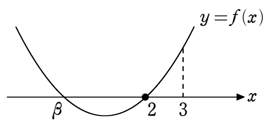
(2) **条件 (ii) がクセモノでしょう。**

まともに考えると通過点として ${}_4\mathrm{C}_2\,(=6)$ **通りの候補があるため，鬱陶しいことこの上ないと思います。**

何とかして，計算量を抑えつつ候補を削ることを考えたいところです。

式でゴリゴリ進めるというよりも，視覚的に条件を満たす $y=f(x)$ **のグラフを考えていくと，次々と「非通過点」が見えてきます。**

例えば， $a>0$（**下に凸**）**のときは**



という状況なので， $(9,\ -2)$，$(4,\ -1)$ **は明らかに通りません。**

【解答】

(1) $y=f(x)$ は $(2,\ 0)$ を通り，x 軸と異なる 2 つの共有点をもつので

$$f(x)=a\,(x-2)(x-\beta)\ \ (a\neq 0,\ \beta\neq 2)\ \ \cdots\cdots(*)$$

と表せる。

$y=f(x)$ が $(1,\ -2)$，$(-1,\ 6)$ を通るとき

$$\begin{cases} -2=-a\,(1-\beta) & \cdots ① \\ 6=-3a\,(-1-\beta) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$a\beta=a-2\ \cdots ①'$

② より，$3a+3a\beta=6$ で，①′ を代入すると

$3a+3(a-2)=6$，すなわち $a=2$ を得る

このとき，①′ より，$2\beta=0$ で，$\beta=0$

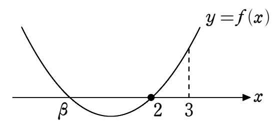
ゆえに，$(*)$ から $f(x)=2x(x-2)$，すなわち $f(x)=2x^2-4x\ \cdots$ 答

(2) [1]：$a>0$ のとき

条件 (i) より $y=f(x)$ のグラフは次の (図 1) のようになる。

このとき，$\beta<2$ である。

$x>2$ の範囲で $f(x)>0$ であることに注意すると



(図 1)

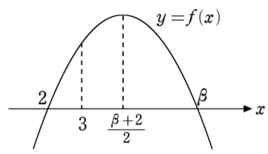
$(9,\ -2)$，$(4,\ -1)$ は通らない。

したがって条件 (ii) から，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 6)$ を通ることになり，(1) から $f(x)=2x^2-4x$（このとき $\beta<2$ を満たす。）

[2]：$a<0$ のとき

条件 (i) より，$y=f(x)$ のグラフは次の (図 2) のようになる。

このとき，$\dfrac{\beta+2}{2}\geqq 3$，すなわち $\beta\geqq 4\ \cdots$(☆) である。



(図 2)

$x<2$ の範囲で $f(x)<0$ であるから $(-1,\ 6)$ は通らない

$2\leqq x\leqq\beta$ の範囲において $f(x)\geqq 0$

(☆) より，$x=4$ は $2\leqq x\leqq\beta$ の範囲に含まれるため，$f(4)\geqq 0$

ゆえに，$(4,\ -1)$ は通らない。

したがって条件 (ii) から $y=f(x)$ は $(9,\ -2)$，$(1,\ -2)$ を通る。

$(*)$ のようにおくと，$\begin{cases} -2=7a\,(9-\beta) \\ -2=-a(1-\beta) \end{cases}$

(1) と同様にこれら 2 式を a，β について解くと $a=-\dfrac{2}{7}$，$\beta=8$

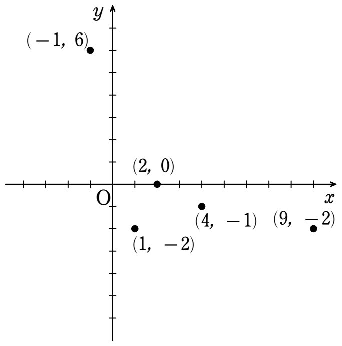
$$\begin{aligned} (*)\text{ より，}f(x)&=-\frac{2}{7}(x-2)(x-8) \\ &=-\frac{2}{7}(x^2-10x+16) \\ &=-\frac{2}{7}x^2+\frac{20}{7}x-\frac{32}{7} \end{aligned}$$

以上 [1]，[2] から

$$f(x)=2x^2-4x,\ -\frac{2}{7}x^2+\frac{20}{7}x-\frac{32}{7}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

タカが２次関数となめてかかると火傷するかもしれません。



と通過点候補の点をプロットしてみても，どれもあり得そうでイヤらしく

設定してあります。