n を 2 以上の整数とするとき，次の問に答えよ。

(1) ${}_2\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{P}_2+\cdots+{}_n\mathrm{P}_2$ の値を n を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{k-2}\,{}_k\mathrm{P}_2$ の値を n を用いて表せ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) **具体的に書き下すと**

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)\cdot n$$

ということであり，これは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,(k+1)$ **に他なりません。**

展開して $\sum k^2$, $\sum k$ **を計算してもよいですが，連続 2 整数の** $\sum$ **は工夫の余地があります。**

これについては $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} k\,(k+1)\{\,(k+2)-(k-1)\,\}$ **とし，**

$\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{\,k\,(k+1)\,(k+2)-(k-1)\,k\,(k+1)\,\}\left(=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{\,b_{k+1}-b_k\,\}\right.$ **の形**$\left.\vphantom{\sum_{k=1}^{n-1}}\right)$

と見ることで，「和の中抜け」を狙っていきます。

(2) **書き下してみると**

$$1\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1)\,n\cdot 2^{n-2}$$

です。

経験がモノを言う部分がありますが

$F\,(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ **を微分すると**

$$F'(x)=1\cdot 2+2\cdot 3\,x+3\cdot 4\,x^2+\cdots\cdots+(n-1)\,n\,x^{n-2}$$

という求める値に近い構造が現れます。

つまり，求めたい値は $F'\,(2)$ **ということになるわけです。**

$F\,(x)$ **を** …… **を用いずに表現するということになると**

(等差)×(等比) 型

の $\sum$ **ということになりますから，セオリー通り公比をかけてズラす**

「かけズラ」

という態度で処理していけばよいでしょう。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}
(\text{与式})&=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)\cdot n\\
&=\sum_{k=1}^{n-1} k\,(k+1)\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} k\,(k+1)\{\,(k+2)-(k-1)\,\}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{\,k\,(k+1)\,(k+2)-(k-1)\,k\,(k+1)\,\}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{\,b_{k+1}-b_k\,\}\ \ (b_k=(k-1)\,k\,(k+1)\ \text{とおいた})\\
&=\frac{1}{3}\{\,(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots\cdots+(b_n-b_{n-1})\,\}\\
&=\frac{1}{3}\,(b_n-b_1)\\
&=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\ \cdots\boxed{\text{答}}
\end{aligned}$$

(2) $f\,(x)=1\cdot 2+2\cdot 3\,x+3\cdot 4\,x^2+\cdots+(n-1)\,n\,x^{n-2}$　　とおく。
$\left(={}_2\mathrm{P}_2+{}_3\mathrm{P}_2\,x+{}_4\mathrm{P}_2\,x^2+\cdots+{}_n\mathrm{P}_2\,x^{n-2}\right)$

$f(x)$ の原始関数の 1 つとして

$$F(x)=1+2x+3x^2+4x^3\cdots+nx^{n-1}\ \ (x\fallingdotseq 1)$$

を定める。

$$\begin{array}{rl}
F(x)=&1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\\
-)\ \ xF(x)=&\quad\ \ x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(1-x)\,F(x)&=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n\\
&=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n\\
&=\frac{1-x^n-nx^n\,(1-x)}{1-x}\\
&=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

$x\fallingdotseq 1$ より，$F(x)=\dfrac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{(x-1)^2}$

$$F'(x)=\frac{\{\,-nx^{n-1}-n^2x^{n-1}+n(n+1)x^n\,\}\,(x-1)^2-2\,(x-1)\,(1-x^n-nx^n+nx^{n+1})}{(x-1)^4}$$

$$\begin{aligned}
F'(2)&=\{\,-n\cdot 2^{n-1}-n^2\cdot 2^{n-1}+n(n+1)\,2^n\,\}-2\,(\,1-2^n-n\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}\,)\\
&=-n\cdot 2^{n+2}+(n+1)\,2^{n+1}+n(n+1)\,2^n-n(n+1)\,2^{n-1}-2\\
&=2^{n+1}\{\,(n+1)-2n\,\}+2^{n-1}n\,(n+1)\{\,2-1\,\}-2\\
&=2^{n+1}(1-n)+2^{n-1}n(n+1)-2\\
&=2^{n-1}\{\,4\,(1-n)+n(n+1)\,\}-2\\
&=2^{n-1}(n^2-3n+4)-2
\end{aligned}$$

求めるものは $f(2)=F'(2)$ なので，

$${}_2\mathrm{P}_2+2\,{}_3\mathrm{P}_2+2^2\,{}_4\mathrm{P}_2+\cdots+2^{n-2}\,{}_n\mathrm{P}_2=2^{n-1}(n^2-3n-4)-2\ \cdots\boxed{\text{答}}$$

【総括】

(1) は

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)\cdot n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\,(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2+\sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{1}{6}n(n-1)\{\,(2n-1)+3\,\} \\
&= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)
\end{aligned}
$$

としてもタカがしれていますが，【解答】の工夫は拡張性がある工夫なのでマスターしましょう。

(2) は経験がモノを言う見方です。

－－－－－－－－－－－－－ よくある問題 －－－－－－－－－－－－－－－－

$$1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2+3\,{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n\ \left(=\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k\right)$$

を求めよ。

＜略解・方針＞

$F(x)=(1+x)^n\ \left(=1+{}_n\mathrm{C}_1\,x+{}_n\mathrm{C}_2\,x^2+{}_n\mathrm{C}_3\,x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,x^n\right)$

とし，微分すると

$$F'(x)=1\,{}_n\mathrm{C}_1+2\,{}_n\mathrm{C}_2\,x+3\,{}_n\mathrm{C}_3\,x^2+\cdots\cdots+n\,{}_n\mathrm{C}_n\,x^{n-1}$$

であるため，$F'(1)$ を求めればよい。

$F'(x)=n\,(1+x)^{n-1}$ であるため，$F'(1)=n\cdot 2^{n-1}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

コンビネーション ${}_n\mathrm{C}_k$ に関する $\sum$ 計算はよくあるけれど，

パーミュテーション ${}_n\mathrm{P}_k$ に関する $\sum$ 計算についてはどうですか

という部分を趣旨として作成しました。