

仮想難関大【確率～座標平面の点の移動～】

O を原点とする座標平面があり、最初点 O にいる動点 P が以下のルール (i), (ii) にしたがって移動する。

(i) コインをくり返し投げ、 n 回目 ($n=1, 2, \dots$) のコイン投げにおいて

n が奇数のとき：表が出れば P は x 軸方向に 1 だけ動き
裏が出れば P は x 軸方向に -1 だけ動く。

n が偶数のとき：表が出れば P は y 軸方向に 1 だけ動き
裏が出れば P は y 軸方向に -1 だけ動く。

(ii) P の x 座標、 y 座標のいずれかが 3、または -3 となった時点で、コインを投げるのをやめ、この移動は終了する。

9 回目の移動により、この試行が終了する確率を求めよ。

<自作>

【戦略】

9 回目 (奇数回目) の移動でこの試行が終了するということは

x 座標が 3、または -3

となって終了する場合を考えればよいでしょう。

これらは対称性から同じ確率ですから、実質は x 座標が 3 となって終了する確率を考える分の負担で済みます。

そこで、 x 座標が 3 となって終了する場合を考えてみます。

8 回目のコイン投げが終わった段階で、

$(2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$

のいずれかにいるわけです。

{ 水平方向 4 回 の移動が起こっているわけなので
上下方向 4 回

水平方向については { $+1$ の移動が 3 回
 -1 の移動が 1 回 } が起こるわけですが

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow$ という移動だと、 x 座標が 3 になってしまうため、除きます。

上下方向については、 $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \uparrow\uparrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow$

という移動の仕方を除くことになります。

【解答】

9 (奇数) 回目にこの移動が終了するのは、 x 座標が 3 または -3 となって終了する場合である。

[1] : x 座標が 3 となって終わる場合

8 回の移動後に P ($2, a$) ($a = -2, -1, 0, 1, 2$) にいる。… (*)

この 8 回の移動は { x 軸方向の移動が 4 回
 y 軸方向の移動が 4 回 } であり

4 回の x 軸方向の移動については { $+1$ の移動が 3 回
 -1 の移動が 1 回

ただし、 $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow$ という移動の仕方は除くので

$$({}_4C_3 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$$

4 回の y 軸方向の移動については、 \uparrow, \downarrow の並べ方 2^4 通りのうち

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow, \uparrow\uparrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow$ という移動の仕方を除く $2^4 - 4 = 12$ 【通り】 あり、

$$12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{4}$$

よって、(*) が起こる確率は $\frac{3}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

9 回目には表が出て x 軸方向に $+1$ 動くので、 x 座標が 3 となって終わる確率は $\frac{9}{64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{128}$

[2] : x 座標が -3 となって終わる場合

[1] のときと同様に $\frac{9}{128}$

[1], [2] は排反な事象であり、 $\frac{9}{128} + \frac{9}{128} = \frac{9}{64}$ … ㊦

【総括】

n の偶奇に必要以上に拘り過ぎると、身動きが取れなくなってしまうかねません。

問題自体の難易度は標準レベルでしょうが、「試験場でセットの中の一問として」ということになると、試験場補正が大きくはたらくと思います。