平行四辺形 OABC に対して，

辺 AB を 1 : 3 に内分する点を D

辺 BC を 2 : 1 に内分する点を E

とし，直線 OE 上に $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ $(k>1)$ となる点 F をとる。

このとき，辺 BC と直線 DF の交点を P とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $k=2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) △BPD の面積と △EPF の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

(1) **基本的な内分点についての位置ベクトルなので，ここは落とせません。**

(2) **登場人物を主役の 2 本 $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表していきます。**

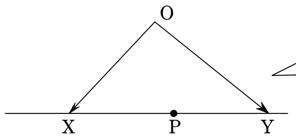
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ **は (1) で得ていますから，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\left(=2\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$ についても $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表しておきます。**

今回の点 P は「交点」として与えられる点であるため

$$\begin{cases}\text{直線 BC 上}\\ \text{直線 DF 上}\end{cases}$$ **と，2 通りで表せることになります。**

一般に直線 XY 上の点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ と表せます。

（係数足して 1 ならば，先っちょ通る直線上）



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{XP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{XY}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+u\left(\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right)\\&=(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{OY}}\end{aligned}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{cases}(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{cases}$ **と 2 通りで表せ，**

これらを $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{cases}(1-s)\,\vec{a}+\vec{c}\\\left(1-\frac{1}{3}t\right)\vec{a}+\left(\frac{7}{4}t+\frac{1}{4}\right)\vec{c}\end{cases}$ **となり**

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であることから，$\vec{a}$，$\vec{c}$ の係数比較に持ち込めます。

(3) **$\vec{x}$，$\vec{y}$ によって作られる三角形の面積公式**

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2}$$

を用いて，直接 △BPD と △EPF の面積を計算するという方針は計算量が多く，心折れると思います。

少し幾何の力を借りて，

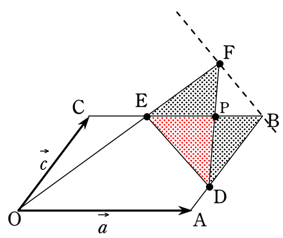
△BPD＝△EPF

⇔ △BPD＋△PED＝△EPF＋△PED

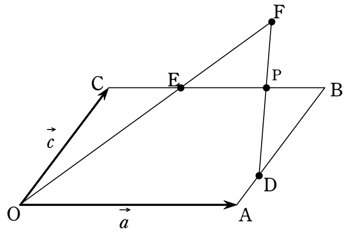
⇔ △BED＝△FED

⇔ DE // BF …(＊)

と，「等積変形」をして考えます。



【解答】



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$ …答

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{c}$ …答

(2) $k=2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}\left(=\frac{2}{3}\vec{a}+2\,\vec{c}\right)$

P は直線 BC 上の点より，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せるため，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+s\,\vec{c}\\&=(1-s)\,\vec{a}+\vec{c}\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方，P は直線 DF 上の点より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

と表せるため，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\left(\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+t\left(\frac{2}{3}\vec{a}+2\,\vec{c}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}t\right)\vec{a}+\left(\frac{7}{4}t+\frac{1}{4}\right)\vec{c}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるため，$\begin{cases}1-s=1-\frac{1}{3}t\\1=\frac{7}{4}t+\frac{1}{4}\end{cases}$

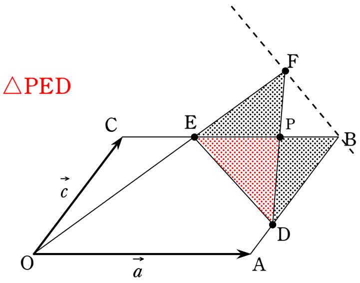
これら 2 式から $s=\frac{1}{7}$，$t=\frac{3}{7}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{6}{7}\vec{a}+\vec{c}$ …答

(3) $\triangle \mathrm{BPD} = \triangle \mathrm{EPF}$

$\Leftrightarrow$ $\triangle \mathrm{BPD} + \triangle \mathrm{PED} = \triangle \mathrm{EPF} + \triangle \mathrm{PED}$

$\Leftrightarrow$ $\triangle \mathrm{BED} = \triangle \mathrm{FED}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{BF}$ $\cdots (*)$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ED}} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OE}} \\ &= \left(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \left(\frac{k}{3}\vec{a} + k\,\vec{c}\right) - (\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{a} + (k-1)\vec{c}\end{aligned}$$

$(*)$ より，実数 ℓ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \ell\,\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ と表せ

$$\left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{a} + (k-1)\vec{c} = \frac{2\ell}{3}\vec{a} - \frac{3\ell}{4}\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから $\begin{cases} \dfrac{k}{3} - 1 = \dfrac{2\ell}{3} \\ k - 1 = -\dfrac{3\ell}{4} \end{cases}$

これら 2 式から，$k = \dfrac{17}{11}$，$\ell = -\dfrac{8}{11}$

よって，求める k の値は $k = \dfrac{17}{11}$ $\cdots$ 答

【総括】

オチの「等積変形」は，幾何的なモノの見方をするため差が付くでしょう。

ベクトルは良くも悪くも機械的な態度で進めることが多い分野です。

一方，幾何は「見たまんま」なので，見えれば早いですがその場力が必要です。

機械的に公式を運用しようとすると計算量が膨らむのが目に見えるなか，幾何の力を借りて計算量をおさえることを目論むためには柔軟性も必要だと思います。