角 α，β，γ が $\alpha+\beta+\gamma=180°$，$\alpha\geqq 0°$，$\beta\geqq 0°$，$\gamma\geqq 0°$ を満たすとき，

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$$

を示せ。

＜ ’05 京都大 ＞

【戦略 1】

手なりに，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1$ を計算していき，$\geqq 0$ ということを目指します。

従属 3 変数なので，その第 1 歩目としては「文字消去」を狙っていくのが自然でしょうか。

ここでは，$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ と，γ を消去していきます。

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1&=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\{180°-(\alpha+\beta)\}-1\\&=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\end{aligned}$$

となります。

ここからは，不等式証明と相性の良い「積の形」を目指し，和積公式を用いて進めていくことを目論んでいくことになります。

【解答】

$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ であるため，

$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\\&=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\{180°-(\alpha+\beta)\}-1\\&=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)-1\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{-2\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right\}\\&=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\&=4\cos\frac{180°-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\&=4\cos\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\&=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

$0°\leqq\alpha\leqq 180°$，$0°\leqq\beta\leqq 180°$，$0°\leqq\gamma\leqq 180°$ より

$0°\leqq\frac{\alpha}{2}\leqq 90°$，$0°\leqq\frac{\beta}{2}\leqq 90°$，$0°\leqq\frac{\gamma}{2}\leqq 90°$ であるため

$$\sin\frac{\alpha}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\beta}{2}\geqq 0,\ \sin\frac{\gamma}{2}\geqq 0$$

ゆえに，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\geqq 0$，すなわち

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$$

が成り立つ。

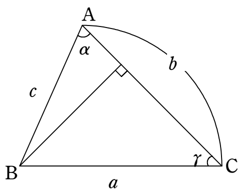
【戦略 2】

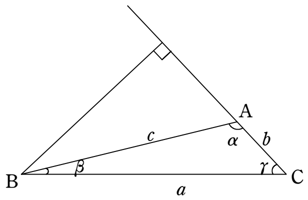
与えられた条件は三角形の内角を彷彿とさせます。

0°，180° なども許されているため，こういう特殊なシチュエーションは先に潰しておきます。

α，β，γ が三角形の内角として与えられる角度であれば，幾何的に攻めることも考えられます。

対称性から，α が最大角として考えても一般性を失いません。





鋭角にしろ鈍角にしろ

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$

が成立します。

そうなると同様に，$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ も得ることになります。

辺々加えると，$b + c = (b+c)\cos\alpha + a(\cos\beta + \cos\gamma)$ です。

これより，$(b+c)(1-\cos\alpha) = a(\cos\beta+\cos\gamma)$ となりますから

$$1-\cos\alpha = \frac{a}{b+c}(\cos\beta+\cos\gamma)$$

を得ます。

三角形の内角の中で，鈍角は高々 1 つだけであることを考えると，β，γ は鋭角であり，$\cos\beta+\cos\gamma \geqq 0$

さらに，三角形の成立条件から，$a \leqq b + c$ なので，$\dfrac{a}{b+c} \leqq 1$

となり，解決します。

【解 2】

$0° \leqq \gamma \leqq \beta \leqq \alpha \leqq 180°$ として考えて一般性を失わない。

$\gamma = 0°$ のとき，$\alpha + \beta = 180°$ であり，

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= \cos\alpha + \cos(180° - \alpha) + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\alpha = 180°$ のとき，$\beta + \gamma = 0°$ であり，$\beta \geqq 0°$，$\gamma \geqq 0°$ なので，$\beta = \gamma = 0°$

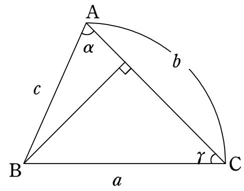
よって，

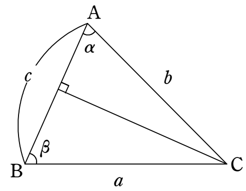
$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= -1+1+1 \\ &= 1\end{aligned}$$

したがって，以後，$0° < \gamma \leqq \beta \leqq \alpha < 180°$ のときを考える。

このとき，$\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$ となる三角形 $\triangle$ABC を考えることができる。

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ と長さを定めると





$$\begin{cases} b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{cases}$$

が成立する。

辺々加えると，

$$b + c = (b+c)\cos\alpha + a(\cos\beta+\cos\gamma)$$

$$(b+c)(1-\cos\alpha) = a(\cos\beta+\cos\gamma)$$

$$1-\cos\alpha = \frac{a}{b+c}(\cos\beta+\cos\gamma) \cdots ①$$

ここで，α が最大角なので，β，γ は鋭角であり，

$$\cos\beta > 0,\ \cos\gamma > 0$$

また，三角形の成立条件から，$a \leqq b + c$ より，$\dfrac{a}{b+c} \leqq 1$

ゆえに，

$$\frac{a}{b+c}(\cos\beta+\cos\gamma) \leqq \cos\beta + \cos\gamma \cdots ②$$

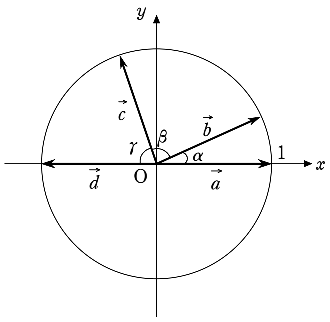
①，② より，$1-\cos\alpha \leqq \cos\beta + \cos\gamma$

すなわち，$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqq 1$ が成立する。

【戦略 3】

ベクトルから攻め落とすことを考えます。

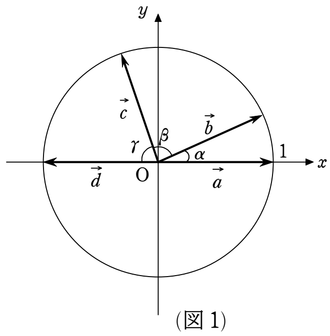
$\cos$ **と言ったら内積ですね。**



と，角 α, β, γ **を設定します。**

単位円で設定すれば， $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ **などとシンプルに扱えます。**

【解 3】



(図 1)

(図 1) のように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，及び角 α, β, γ を定める。

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ， $\cos\beta=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ ， $\cos\gamma=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}=\vec{c}\cdot\vec{d}$

また，$\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos180^\circ=-1$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{a}\\&=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{d})\\&=\vec{u}\cdot\vec{v}\ \ (\vec{u}=\vec{a}+\vec{c},\ \vec{v}=\vec{b}+\vec{d}\ \text{とおいた})\ \cdots(*)\end{aligned}$$

$\vec{u}$ と x 軸とのなす角は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\vec{v}$ と x 軸とのなす角は $\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{2}$

$\vec{u}$，$\vec{v}$ のなす角を θ とすると，$\theta=\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

条件から，$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\alpha\geqq0^\circ$, $\beta\geqq0^\circ$, $\gamma\geqq0^\circ$ であり

$$0^\circ\leqq\alpha+\gamma\leqq180^\circ$$

したがって，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$であるため，$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\geqq0\ \ \cdots(**)$

$(*)$, $(**)$ より，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\geqq0$，すなわち

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq1$$

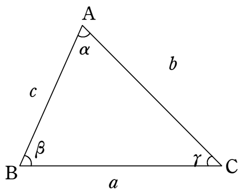
が成り立つ。

【総括】

【解 2】，【解 3】は大人がカッコつけた解答で，家で楽しむ解答です。

和積公式でゴリゴリいく【解 1】の路線が現実的ですが，試験場でそこまでスムーズにいくかというと，中々思うようにいかない受験生が多いでしょう。

なお，【解 2】で用いた



$$\begin{cases} a = c\cos\beta + b\cos\gamma \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = b\cos\alpha + a\cos\beta \end{cases}$$

という関係式を「第 1 余弦定理」と言います。

普段用いている余弦定理

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

は「第 2 余弦定理」と言います。

別に今後わざわざ第 2 余弦定理と呼ばなくても大丈夫です。