(1)　複素数 $z \fallingdotseq 1$ に対し

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

を証明せよ。

(2)　次の式を証明せよ。

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

＜ '71 富山大 ＞

【戦略】

(1)　**等比数列の和の公式証明です。**

公比をかけてズラす「カケズラ」で倒します。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ **なのですが，この** $\cos k\theta$ **は** $z=\cos\theta+i\sin\theta$ **に対する**

$z^k\,(=\cos k\theta+i\sin k\theta)$ **の実部です。**

ゆえに，今回の $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ **は** $z=\cos\theta+i\sin\theta$ **に対する**

$S_n=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n$ **の実部ということになります。**

(1) **の等式から，** $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ **の実部を求めれば解決です。**

あとは $z=\cos\theta+i\sin\theta$ **を代入して** $A+Bi$ **の形を目指してほぐしていきます。**

この計算作業は三角関数の諸公式が自分のものになっている必要があります。

【解答】

(1)　$S_n=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n$　$\cdots$①　とおく。

$zS_n=\quad z+z^2+\cdots\cdots+z^n+z^{n+1}$　$\cdots$②

①$-$② より，$(1-z)S_n=1-z^{n+1}$

$z\fallingdotseq 1$ より，$S_n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$　が成立する。

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ に対して，ド・モアブルの定理から，

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

ここで，(1) の S_n に対して

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}z^k\\&=\sum_{k=0}^{n}(\cos k\theta+\sin k\theta)\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta\right)i\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ は S_n の実部である。$\cdots(*)$

$$S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$=\frac{1-\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\{1-\cos(n+1)\theta\}-\{\sin(n+1)\theta\}i}{(1-\cos\theta)-(\sin\theta)i}$$

目標の式は

$$\frac{\theta}{2}$$

という角度です

半角 ＆ 2 倍角

$$=\frac{2\sin^2\dfrac{(n+1)\theta}{2}-\left\{2\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right\}i}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)i}$$

因数分解

$$=\frac{2\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\left\{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right\}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\left\{\sin\dfrac{\theta}{2}-i\cos\dfrac{\theta}{2}\right\}}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\left\{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right\}\cdot\left\{\sin\dfrac{\theta}{2}+i\cos\dfrac{\theta}{2}\right\}}{\left\{\sin\dfrac{\theta}{2}-i\cos\dfrac{\theta}{2}\right\}\cdot\left\{\sin\dfrac{\theta}{2}+i\cos\dfrac{\theta}{2}\right\}}$$

有理化

$$=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\right\}\cdot\left\{\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)\right\}\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right\}$$

ゆえに，S_n の実部は $\dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

$(*)$ より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

すなわち

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

が成り立つ。

【総括】

ド・モアブルの定理を利用して三角関数に関わる $\sum$ を計算することは

常套手段の 1 つです。

ノーヒントの場合は経験がないとツライものがあります。

なお，本問において虚部を比較すると

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を得ます。

本問 (2) の結果と並べてかくと

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

となり，「ラグランジュの三角恒等式」と呼ばれます。