数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_n = 2^{2^n} + 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 0$ のとき，$a_{n+1} = \left(2^{2^n} - 1\right) a_n + 2$ が成り立つことを示せ。

(2) $n \geqq 1$ のとき，$a_n = a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1} + 2$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) m，n を相異なる 0 以上の整数とするとき，a_m と a_n は互いに素であることを示せ。

＜ '06 岐阜大 改 ＞

【戦略】

(1) **正直どうとでもなるのですが，指数に次ぐ指数が登場するため，ミスだけがこわいところです。**

左辺から右辺に辿り着こうと思うと，頭に血が昇りやすい計算となるため，どちらかというと，右辺を変形していき，左辺を目指すという方向がやりやすいと思います。

(2) **帰納法という解法縛りがあるため，方針面で困ることはないでしょう。**

a_{k+1}，a_k **という隣接 2 項についての関係式は (1) で得ているため，帰納法における前段仮定との結びつきも手なりに進んでいけるはずです。**

(3) $m < n$ **のときを考えれば十分です。**

大方針として、「背理法」で仕留めるというのは睨みたいですね。

a_n，a_m **が互いに素でないと仮定し，公約数** $G\ (>1)$ **をもつとします。すると，** $a_n = a_0 a_1 \cdots a_m \cdots a_{n-1} + 2$ **という (2) の関係式から**

$$\begin{aligned} 2 &= a_n - a_0 a_1 \cdots a_m \cdots a_{n-1} \\ &= GN - GK \\ &= G \cdot (\text{整数}) \end{aligned}$$

ということが言え， $\dfrac{2}{G} = (\text{整数})$ **という形となるわけです。**

そうなると， G **は 2 の正の約数ということになり，** $G > 1$ **を考えると** $G = 2$ **となるしかありませんが，そもそもの**

$$a_n = 2^{2^n} + 1 \ ,\ a_m = 2^{2^m} + 1$$

という形から， a_n，a_m **は奇数で，公約数 2 をもつはずがなく，矛盾することになります。**

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} \left(2^{2^n} - 1\right) a_n + 2 &= \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 + 2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\ &= 2^{2 \cdot 2^n} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) $n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $a_n = a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1} + 2 \ \cdots (*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$a_0 + 2 = \left(2^{2^0} + 1\right) + 2 = (2^1 + 1) + 2 = 5$

$a_1 = a_0 + 2$ となり，$(*)$ は成り立つ。

(ii) $n = k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$a_k = a_0 a_1 \cdots\cdots a_{k-1} + 2 \ \cdots ①$$

と仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \left(2^{2^k} - 1\right) a_k + 2 \quad (\because (1) \text{より}) \\ &= \left\{\left(2^{2^k} + 1\right) - 2\right\} a_k + 2 \\ &= (a_k - 2) a_k + 2 \\ &= \{a_0 a_1 \cdots\cdots a_{k-1} + 2 - 2\} a_k + 2 \quad (\because ① \text{より}) \\ &= a_0 a_1 \cdots\cdots a_{k-1} a_k + 2 \end{aligned}$$

これは，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つことを意味する。

以上 (i)，(ii) から，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$a_n = a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1} + 2$$

が成り立つことが示された。

(3)　$m<n$ のときを考えれば十分である。

a_n，a_m が互いに素でないと仮定する。

このとき，

$$\begin{cases} a_n = GN \\ a_m = GM \cdots ① \end{cases} \quad (G \text{ は } 2 \text{ 以上の整数}, N, M \text{ は正の整数})$$

という 1 より大きな公約数 G が存在する。

(2) より $a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1} + 2 = GN \cdots ②$

$m<n$ であり，a_m は a_0，a_1，……，a_{n-1} のいずれかである。

ゆえに，$a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1}$ は G の倍数となり，K を正の整数として

$$a_0 a_1 \cdots\cdots a_{n-1} = GK \cdots ③$$

と表せる。

③ を ② に代入すると，$GK+2=GN$

これより，$G(N-K)=2$，すなわち $N-K=\dfrac{2}{G} \cdots ④$

ここで，a_n，a_m は

$$\begin{cases} a_n = 2^{2^n}+1 \,(=\text{奇数}) \\ a_m = 2^{2^m}+1 \,(=\text{奇数}) \end{cases}$$

であり，常に奇数であるため，これらが 1 以外の公約数 G をもつとしたら，G は 3 以上の奇数である。

すると，④ の左辺は整数，右辺は整数でないということになり矛盾する。

以上から，題意は示された。

【総括】

(2) は帰納法縛りがありましたが，書き下していってよいなら

$$\begin{aligned} a_n &= \left(2^{2^n}-1\right)+2 \\ &= \left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-1}}-1\right)+2 \\ &= \left(2^{2^{n-1}}-1\right)a_{n-1}+2 \\ &= \left(2^{2^{n-2}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}-1\right)a_{n-1}+2 \\ &= \left(2^{2^{n-2}}-1\right)a_{n-1}a_{n-2}+2 \\ &\quad\vdots \\ &= (2^1-1)\,a_0 a_2 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1}+2 \\ &= a_0 a_2 \cdots\cdots a_{n-2} a_{n-1}+2 \end{aligned}$$

と示すこともできます。

今回の a_n は「フェルマー数」と呼ばれる有名な形の数で，よく F_n という記号で表現されます。(フィボナッチ数列も同じ F_n を表すこともあって若干紛らわしいですが。)

本問で示した結果のほかにも，様々な性質があります。

例えば，

$$a_{n+1} = (a_n-1)^2+1$$

という関係式も成り立ちます。

(証明)

$2^n = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = 2b_n \cdots (☆)$ であり，$a_n = 2^{b_n}+1 \cdots (★)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^{b_{n+1}}+1 \\ &= 2^{2b_n}+1 \quad (\because (☆)) \\ &= (2^{b_n})^2+1 \\ &= (a_n-1)^2+1 \quad (\because (★)) \end{aligned}$$