オイラーの定数

自然数 n に対して次のようにおく。

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\ ,\quad b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)$$

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n<a_{n-1}$，$b_n>b_{n-1}$ を示せ。

不等式 $1.09<\log 3<1,1$ を用いて，(2)，(3) に答えよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$b_n>0.4$ を示せ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$0,4<a_n<0.75$ を示せ。

＜ '10 大阪医科大 ＞

【戦略】

(1)　**$n=1$，2，$\cdots$ に対して $a_{n+1}<a_n$，$b_{n+1}>b_n$ であることを示しても同じことです。**

a_n-a_{n+1} **を計算すると，** $\log(n+1)-\log n-\dfrac{1}{n+1}$ **となります。**

これが正であるということを示したいので，微分の力を借りるために $f(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}\ (x>0)$ **とおき，微分します。**

$f'(x)=\cdots\cdots=-\dfrac{1}{x(x+1)^2}<0$ **となり，単調減少です。**

遥か彼方の $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ **については**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

なので，減少しても 0 を下回ることはないと言え，$f(x)>0$ **です。**

$b_{n+1}-b_n>0$ **についての証明も同じです。**

(2)　**(1) より，数列** $\{b_n\}$ **は単調増加であることが分かります。**

つまり，一番小さい b_2 **でも 0.4 を上回っていると言えれば OK です。**

これについては与えられた $\log 3$ **の評価を単純利用すれば大丈夫です。**

(3)　$a_n<0.75$ **を示すには，**$n\geqq 3$ **の範囲内で，**a_3 **が最大ですから，** $a_3<0.75$ **と言えればいいわけです。**

これについては (2) 同様に $\log 3$ **の評価を利用すれば OK です。**

$\dfrac{11}{15}<a_3<\dfrac{223}{300}$ **となりますが，**$\dfrac{223}{300}<\dfrac{75}{100}$ **なので，**$a_3<0.75$ **がいえます。**

問題は $a_n>0.4$ **をどのように言うかです。**

a_n **を小さくしよう小さくしようと思っても，数列** $\{a\}$ **は単調減少です。**

そこで，(2) の誘導を用いる方向性で，$a_n>b_n$ **を示しにいきます。**

$a_n>b_n$ **が示せたら，**$b_n>0.4$ **なので，**$a_n>0.4$ **も言えるわけです。**

【解答】

(1)　$n\geqq 1$ のときに，$a_{n+1}<a_n$，$b_{n+1}>b_n$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}a_n-a_{n+1}&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)-\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)\right\}\\&=\log(n+1)-\log n-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$f(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}\ (x>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}\\&=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0\end{aligned}$$

$x>0$ の範囲で $f(x)$ は単調減少。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$

ゆえに，$f(x)>0$ であるため，$n=1$，2，$\cdots$ に対して $f(n)>0$

これより $n=1$，2，$\cdots$ に対して $a_n-a_{n+1}>0$，すなわち $a_{n+1}<a_n$

次に

$$b_{n+1}-b_n=\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\log(n+2)\right\}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\log(n+1)-\log(n+2)$$

$g(x)=\dfrac{1}{x+1}+\log(x+1)-\log(x+2)\ \ (x>-1)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\\&=\frac{-(x+2)+(x+1)(x+2)-(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}\\&=-\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}<0\end{aligned}$$

$g(x)$ は $x>-1$ の範囲で単調減少

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x+1}+\log\frac{x+1}{x+2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x+1}+\log\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right\}$$

$$=0$$

ゆえに，$x>-1$ で $g(x)>0$ であるため，$n=1$，2，$\cdots$ に対して $g(n)>0$

これより，$n=1$，2，$\cdots$ に対して $b_{n+1}-b_n>0$，すなわち $b_{n+1}>b_n$

以上から題意は示された。

(2) $b_2=1+\frac{1}{2}-\log 3$

$\quad=\frac{3}{2}-\log 3$

$1.09<\log 3<1.1$ より，$\frac{3}{2}-1.1<\frac{3}{2}-\log 3<\frac{3}{2}-1.09$

すなわち $0.4<b_2<0.41$

(1) より，$b_n \geqq b_2 \ (n \geqq 2)$ であり，$b_n>0.4$

(3) $a_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\log 3$

$\quad=\frac{11}{6}-\log 3$

$1.09<\log 3<1.1$ より $\frac{11}{6}-1.1<\frac{11}{6}-\log 3<\frac{11}{6}-1.09$

すなわち，$\frac{11}{15}<a_3<\frac{223}{300}\left(<\frac{75}{100}\right)$

$n \geqq 3$ に対して，$a_n \leqq a_3<0.75$ で，$a_n<0.75$

一方，$a_n-b_n=\log(n+1)-\log n$

$\quad=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

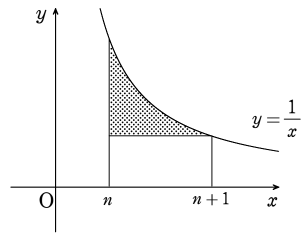
$\quad>0$

ゆえに，$a_n>b_n>0.4$

以上から，$0,4<a_n<0.75$ である。

【総括】

(1) は



という打点部の面積が

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{n+1}=\Big[\log x\Big]_n^{n+1}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\log(n+1)-\log n-\frac{1}{n+1}$$
$$=a_n-a_{n+1}$$

なので，$a_n-a_{n+1}>0$ と視覚的に言うこともできます。

なお，本問の結果から，数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であるため収束します。

この極限値は γ (オイラーの定数) と呼ばれます。

つまり，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=\gamma$ ということです。

このオイラーの定数 γ は $\gamma=0.577215\cdots$ となります。

ただ，このオイラーの定数 γ は無理数なのか有理数なのかも未だに分かっていません。(恐らく無理数であるだろうと予想されています。)

オイラーの定数 γ は n が十分に大きいときの

調和級数と，対数関数の差

ということを意味しています。

$\lim_{n\to\infty} b_n$ も本質的には同じで

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n+\log n-\log(n+1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n+\log\frac{n}{n+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n+\log\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right\}$$
$$=\gamma$$

となります。