n を自然数とする。3 次方程式

$$2x^3+3nx^2-3(n+1)=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

について次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n の値に関わらず方程式 $(*)$ は正の解をただ 1 つだけもつことを証明せよ。

(2) 方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする。このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

＜ ’98 信州大 ＞

【戦略】

(1) $f(x)=2x^3+3nx^2-3(n+1)$ **として，**
① **単調性**
② **正となる代入値の存在**
③ **負となる代入値の存在**

が言えれば，題意を示します。② については極限を調べれば十分です。

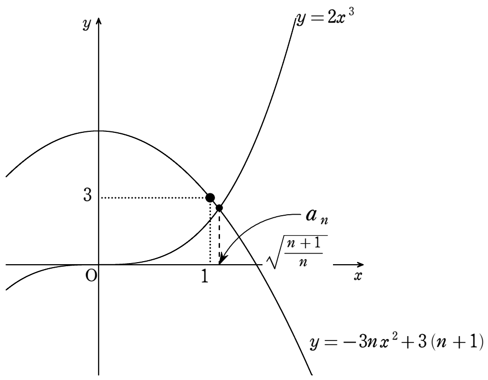
(2) **方程式を組み替えて，**$2x^3=-3nx^2+3(n+1)$ **と見ます。**

n **が 2 ヵ所で動くため，例題の問題よりは少し集中力が必要です。**

こういったとき，この放物線が「必ず通る点」がないかに意識を向けるクセがついているかどうかが重要です。

今回，$y=-3nx^2+3(n+1)$ **は** n **の値に関わらず** $(\pm 1,\ 3)$ **を通ります。**
（n **についての恒等式として処理するのがオフィシャルでしょうが，この程度であれば，「**n **が消えるような** x **何かな～」ぐらいのラフな感じで十分です。）**

正の解に注目するので，第 1 象限に集中します。



(1，3) を通るように放物線が「痩せ細っていく」という感じの動きをします。

$\lim_{n\to\infty} a_n=1$ **ということが想像がつきますが，やはり上記の放物線の動きを紙面上で表現するのは難しさがあると思います。**

そこで今回は x **切片** $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ **に注目し，**$1<a_n<\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

という不等式に注目し，はさみうちの原理による記述にしたいと思います。

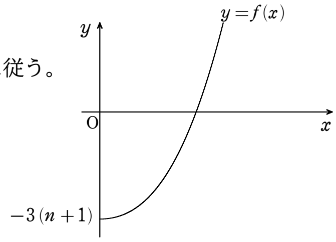
【解答】

(1) $f(x)=2x^3+3nx^2-3(n+1)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2+6nx \\ &=6x(x+n) \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減は次の増減表に従う。

x	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$-3(n+1)$	↗	∞



グラフより，$f(x)=0$ は 正の解をただ 1 つもつ。

(2) $(*)$ を満たす x は $2x^3=-3nx^2+3(n+1) \cdots (**)$ を満たしている。

a_n は $(**)$ の正の解である。

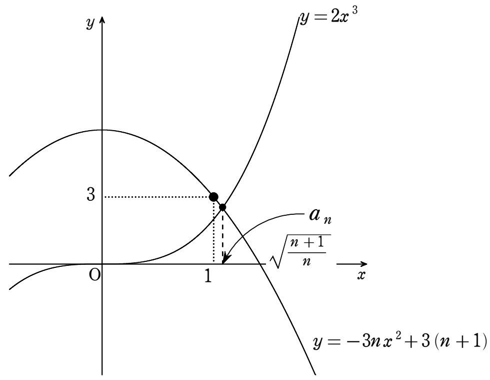
a_n は $y=2x^3$ と $y=-3nx^2+3(n+1)$ の交点の x 座標である。

$y=-3nx^2+3(n+1)$ は n の値に関わらず $(1,\ 3)$ を通る。 $\cdots$ ①

$(1,\ 3)$ は $y>2x^3$ の領域内の点である。$\cdots$ ②

$y=-3nx^2+3(n+1)$ の x 切片のうち正のものは $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$ $\cdots$ ③

①，②，③ に注意すると，以下の図のようになる。



ゆえに，$1<a_n<\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$ であり，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1 \cdots 答$$

【戦略 2】(2) について

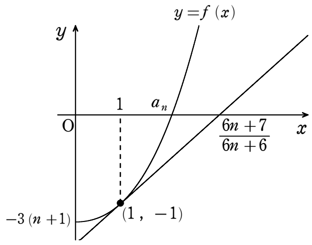
$2x^3+3nx^2-3(n+1)=0$ ……(＊) が因数分解できればそれが一番早いのですが，それが今回はかないません。

$=0$ となるようなものを探すとなると，n を消そうとして $x=1$ を代入すると思いますが，$=0$ とはなってくれません。

ただ，$y=2x^3+3nx^2-3(n+1)$ が必ず $(1,\ -1)$ を通ることは見いだせると思います。

そこで，n によらず必ず通る $(1,\ -1)$ における接線を考えてみます。

細かな計算はあとでちゃんとやりますが



という状況になりますので，$1<a_n<\dfrac{6n+7}{6n+6}$ となり，はさみうちの原理で解決します。

【解 2】(2) について

(2) $f(x)=3(x^2-1)n+2x^3-3$ に対して

$f(x)$ は自然数 n の値に関わらず，点 $(1,\ -1)$ を通る。

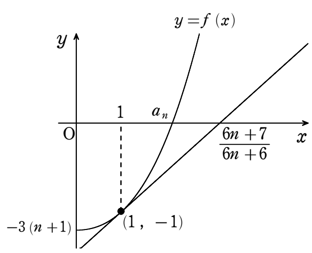
点 $(1,\ -1)$ における接線の方程式は，$f'(1)=6n+6$ より

$y=(6n+6)(x-1)-1$，すなわち

$$y=(6n+6)x-6n-7$$

この接線の x 切片の値は $0=(6n+6)-6n-7$ を解き，$x=\dfrac{6n+7}{6n+6}$

ゆえに右のグラフを得る。



したがって，$1<a_n<\dfrac{6n+7}{6n+6}$

$$\frac{6n+7}{6n+6}=\frac{1+\frac{7}{6n}}{1+\frac{1}{n}}\to 1 \quad (n\to\infty)$$

ゆえに，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ …答

【総括】

a_n が求まらないから，極限をはさみうちで仕留めるという方向性は睨みたいところです。

視覚化の路線は強力ですが，自明としてよい線引きが難しいかもしれません。(本問は絶妙なラインだと思います。)