n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) x の 3 次方程式 $x^3+\frac{1}{n}x-8=0$ の実数解はただ一つであることを示せ。

(2) a_n を (1) の実数解とする。

(i) 次の不等式が成り立つことを示せ。 $0<a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$

(ii) 極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

＜ '09 兵庫県立大 ＞

【戦略】

(1) $f(x)=x^3+\frac{1}{n}x-8$ **として，** $\begin{cases} \text{① 単調性} \\ \text{② 正となる代入値の存在} \\ \text{③ 負となる代入値の存在} \end{cases}$

が言えれば，題意が示せますが，②，③ については極限について言及すれば十分でしょう。

(2) (i) **について** a_n **が式として Get できませんから，「視覚化」によって** a_n **についての諸々の性質を見ていくことを考えます。**

n **の変化に伴う** a_n **の動きを把握するにあたり** $x^3+\frac{1}{n}x-8=0$ **のまま考えると，** $y=x^3+\frac{1}{n}x-8$ **という 3 次関数のグラフの動きを追っていくことになり，考えづらいでしょう。**

そこで，方程式を組み替えて， $x^3=-\frac{1}{n}x+8$ **とし，厄介な 3 次関数は固定したものとして考えます。**

$y=x^3$ **という固定された 3 次曲線と** $y=-\frac{1}{n}x+8$ **というグラフの交点で考えることができ，** n **を動かしても目で追っていける範囲内の動きになります。**

これは同時に (ii) も解決できる方針です。

【解答】

(1) $f(x)=x^3+\frac{1}{n}x-8$ とおく。

$f'(x)=3x^2+\frac{1}{n}>0$ であり，$f(x)$ は単調増加である。

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ より $f(x)=0$ となる実数解はただ一つである。

(2) (i) $x^3+\frac{1}{n}x-8=0$ は

$$x^3=-\frac{1}{n}x+8$$

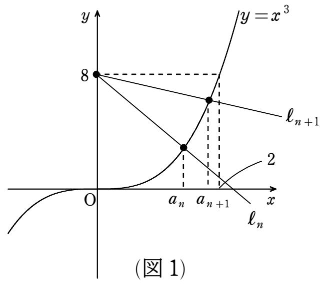
と変形できる。

よって，$\ell_n : y=-\frac{1}{n}x+8$ とおいたとき

$y=x^3$ と ℓ_n の交点の x 座標が a_n である。

ℓ_n が $(0，8)$ という定点を通るということ，及び ℓ_n，ℓ_{n+1} の傾きについて，$-\frac{1}{n}<-\frac{1}{n+1}$ であることを考えると

(図 1) のような状態となり，$0<a_n<2$，及び $a_n<a_{n+1}$ が成り立つ。



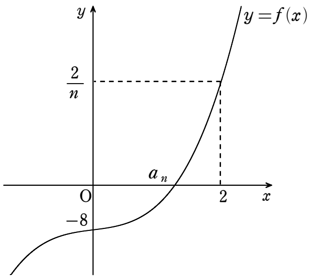
(図 1)

(ii) ℓ_n の傾き $-\frac{1}{n}$ について，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$ であるため，(図 1) から

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2 \ \cdots \text{答}$$

【戦略 2】(2) について

(i)　**$=0$ を相手にしたまま考えるとなると，**



のように，$\begin{cases} f(x) \text{ の単調性} \\ f(0)<0 \\ f(2)>0 \end{cases}$ **を示せばおしまいです。**

a_n **と** a_{n+1} **の大小については，グラフ的に**

$$p>a_n \iff f(p)>0$$
$$p<a_n \iff f(p)<0$$

が言えますから，$f(a_{n+1})$ **の計算結果が正なのか負なのかを把握しにいくことになるでしょう。**

(ii)　**・単調増加であること。**
・2 で上から押さえられている

ということから，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$ **であることは予想できるでしょう。**

a_n **は直接は出ないので，本人不在の極限を求める路線である**

「はさみうちの原理」

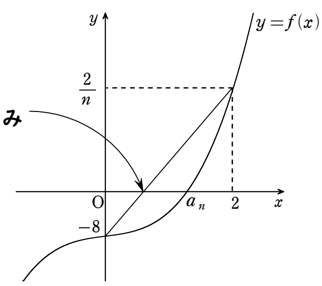
に照準を合わせます。

$a_n<2$ **と上からおさえられていますから，下からどのように押さえるかが問題です。**

$f''(x)=6x$ **なので，**$x>0$ **の範囲では** $f''(x)>0$ **であり，**$f(x)$ **は下に凸です。**

そこで

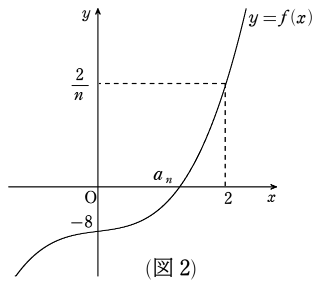
この値で
下からおさえてみます。



【解 2】(2) について

(2)　(i)　$f(0)=-8<0$，　$f(2)=\dfrac{2}{n}>0$

(1) の結果と合わせると，
(図 2) のようになり，
$0<a_n<2$ が成り立つ。



(図 2)

ここの変形が山場

ここで，$f(a_{n+1})=\left(a_{n+1}{}^3+\dfrac{1}{n}a_{n+1}-8\right)-0$

$$=a_{n+1}{}^3+\frac{1}{n}a_{n+1}-8-\left(a_{n+1}{}^3+\frac{1}{n+1}a_{n+1}-8\right)$$
$$=\frac{1}{n}a_{n+1}-\frac{1}{n+1}a_{n+1}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}a_{n+1}$$
$$>0$$

$x^3+\dfrac{1}{n+1}x-8=0$
の解が $x=a_{n+1}$

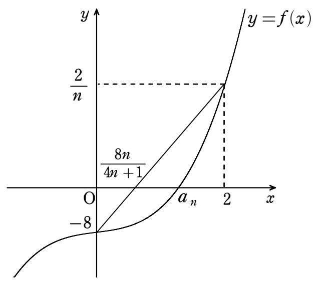
ゆえに，$f(a_{n+1})>f(a_n)$（$=0$）

(1) より，$f(x)$ は単調増加であるため，$a_{n+1}>a_n$ となる。

(ii)　$(0,\ -8)$ と $\left(2,\ \dfrac{2}{n}\right)$ を結ぶ直線の式は

$$y=\frac{\frac{2}{n}+8}{2-0}x-8\text{，すなわち}\quad y=\frac{4n+1}{n}x-8$$

この直線の x 切片は $0=\dfrac{4n+1}{n}x-8$ を解いて $x=\dfrac{8n}{4n+1}$



ゆえに，$\dfrac{8n}{4n+1}<a_n<2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{4+\frac{1}{n}}=2$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} a_n=2 \cdots \text{答}$$

【総括】

何でもかんでも $=0$ を相手にする必要はありません。

考えやすいように方程式を組み替えるという工夫は積極的に狙っていきたい考え方です。

【解 2】の $x^3+\dfrac{1}{n}x-8=0$ のまま考える路線について，最初から最短距離で解決できる人は決して多くないでしょう。
大なり小なりの試行錯誤が必要な部分はあると思います。