xy 平面上の点 $P(x,\ y)$ から定点 $F(a,\ b)$ までの距離 PF と，点 P から直線 $x=c$ に下した垂線の長さ PH の比を $e=\dfrac{PF}{PH}$ とする。ただし，$a \neq c$ とする。

(1) $e=1$ のとき，点 P の軌跡を表す方程式を求め，その概形をえがけ。

(2) $e=\dfrac{1}{2}$ のとき，点 P の軌跡が楕円になることを示し，その長軸と短軸の長さの比を求めよ。

(3) $e=2$ のとき，点 P の軌跡が双曲線になることを示し，その頂点の座標および漸近線の傾きを求めよ。

＜ '00 宇都宮大 ＞

【戦略】

$PF=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ ， $PH=|x-c|$ **より，**

$$e=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{|x-c|}$$

です。

これを整理すると，$(x-a)^2+(y-b)^2=e^2(x-c)^2$ **となります。**

ここまで準備しておいて，(1)，(2)，(3) のそれぞれの e **の値を代入して整理していきます。**

(1) $(y-t)^2=u(x-s)$ **という形を目指せばよいでしょう。**

これにより，頂点が $(s,\ t)$，**焦点が** $\left(\dfrac{u}{4}+s,\ t\right)$ **準線が** $x=-\dfrac{u}{4}+s$ **となります。**

(2) $\dfrac{(x-s)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(y-t)^2}{\beta^2}=1$ **という形を目指します。**

これにより，中心は $(s,\ t)$，

焦点は $\begin{cases} \alpha>\beta \text{ ならば } (\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+s,\ t) \\ \alpha<\beta \text{ ならば，} (s,\ \pm\sqrt{\beta^2-\alpha^2}+t) \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha>\beta \text{ ならば，長軸の長さは } 2|\alpha| \text{，短軸の長さは } 2|\beta| \\ \alpha<\beta \text{ ならば，長軸の長さは } 2|\beta| \text{，短軸の長さは } 2|\alpha| \end{cases}$

となります。

(3) $\dfrac{(x-s)^2}{\alpha^2}-\dfrac{(y-t)^2}{\beta^2}=\pm1$ **という形を目指します。**

今回は $\dfrac{(x-s)^2}{\alpha^2}-\dfrac{(y-t)^2}{\beta^2}=1$ **の形となります。**

これにより，頂点は $(\pm\alpha+s,\ t)$，**焦点は** $(\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+s,\ t)$
漸近線は $y-t=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}(x-s)$ **となります。**

【解答】

$PF=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ ， $PH=|x-c|$

$$e=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{|x-c|}$$

ゆえに，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=e\,|x-c|$

これより，$(x-a)^2+(y-b)^2=e^2(x-c)^2 \quad \cdots(*)$

(1) $e=1$ のとき，(*) より $(x-a)^2+(y-b)^2=(x-c)^2$

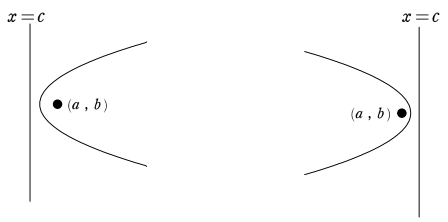
$$\begin{aligned}(y-b)^2&=(x-c)^2-(x-a)^2\\&=\{(x-c)+(x-a)\}\{(x-c)-(x-a)\}\\&=(a-c)\{2x-(a+c)\}\\&=2(a-c)\left(x-\frac{a+c}{2}\right)\ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned}&(a-c)\left(x-\frac{a+c}{2}\right)=\frac{1}{2}(y-b)^2\\&x-\frac{a+c}{2}=\frac{1}{2(a-c)}(y-b)^2\\&x=\frac{1}{2(a-c)}(y-b)^2+\frac{a+c}{2}\quad \text{も可}\end{aligned}\right)$$

放物線の定義から焦点と準線は即答

頂点は $\left(\dfrac{a+c}{2},\ b\right)$，焦点は $(a,\ b)$，準線は $x=c$

これを図示すると



$a>c$ のとき　　$a<c$ のとき

(2) $e=\dfrac{1}{2}$ のとき，(*) より $(x-a)^2+(y-b)^2=\dfrac{1}{4}(x-c)^2$

$4(x-a)^2+4(y-b)^2=(x-c)^2$

$3x^2-2(4a-c)x+4a^2-c^2+4(y-b)^2=0$

$3\left(x-\dfrac{4a-c}{3}\right)^2+4(y-b)^2=\dfrac{4(a-c)^2}{3}$

$$\frac{\left(x-\dfrac{4a-c}{3}\right)^2}{\left\{\dfrac{2(a-c)}{3}\right\}^2}+\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{a-c}{\sqrt{3}}\right\}^2}=1$$

中心 $\left(\dfrac{4a-c}{3},\ b\right)$，長軸の長さは $\dfrac{4|a-c|}{3}$，短軸の長さは $\dfrac{2|a-c|}{\sqrt{3}}$

ゆえに，長軸と短軸の長さの比は

$$\frac{4|a-c|}{3}:\frac{2|a-c|}{\sqrt{3}}=2:\sqrt{3}\ \cdots \text{答}$$

(3)　$e=2$ のとき，(*) より，$(x-a)^2+(y-b)^2=4(x-c)^2$

$$3x^2+2(a-4c)x+4c^2-a^2-(y-b)^2=0$$

$$3\left(x+\frac{a-4c}{3}\right)^2-(y-b)^2=\frac{4(a-c)^2}{3}$$

$$\frac{\left(x+\dfrac{a-4c}{3}\right)^2}{\left\{\dfrac{2(a-c)}{3}\right\}^2}-\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{2(a-c)}{\sqrt{3}}\right\}^2}=1$$

頂点の座標は $\left(\dfrac{-a+4c}{3}\pm\dfrac{2(a-c)}{3},\ b\right)$，すなわち

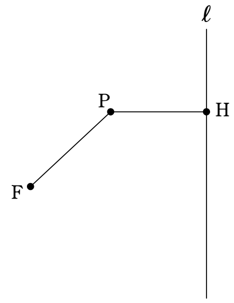
$$\left(\frac{a+2c}{3},\ b\right),\ (-a+2c,\ b)\ \cdots 答$$

漸近線の傾きは，$\pm\dfrac{\left|\dfrac{2(a-c)}{\sqrt{3}}\right|}{\left|\dfrac{2(a-c)}{3}\right|}=\pm\sqrt{3}$ …答

【総括】

定点 F と定直線 ℓ に対して

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PH}}=e\ (一定)$$



となるような点 P の軌跡は 2 次曲線となります。

それは本問の (*) の次数を考えると納得はしやすいでしょう。

この e の値を離心率と言います。

$$\begin{cases} 0<e<1 & のときは楕円 \\ e=1 & のときは放物線 \\ e>1 & のときは双曲線 \end{cases}$$

となります。

【理由】

$e=1$ のときは本問の (1) の結果から成り立つ。

$e>1$ のとき，(*) は

$$\frac{\left(x-\dfrac{ce^2-a}{e^2-1}\right)^2}{\left\{\dfrac{e|a-c|}{e^2-1}\right\}^2}-\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{e\sqrt{e^2-1}\,|a-c|}{e^2-1}\right\}}=1$$

と変形でき，これは双曲線を表す。

$0<e<1$ のとき，(*) は

$$\frac{\left(x-\dfrac{a-ce^2}{1-e^2}\right)^2}{\left\{\dfrac{e|a-c|}{1-e^2}\right\}^2}+\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{e\sqrt{1-e^2}\,|a-c|}{1-e^2}\right\}^2}=1$$

と変形でき，これは楕円を表す。

【計算過程】

$e>1$ のとき

$$(x-a)^2+(y-b)^2=e^2(x-c)^2$$

$$x^2-2ax+a^2+(y-b)^2=e^2x^2-2ce^2x+e^2c^2$$

$$(e^2-1)x^2-2(ce^2-a)x+e^2c^2-a^2-(y-b)^2=0$$

両辺 e^2-1（>0）で割ると

$$x^2-2\cdot\frac{ce^2-a}{e^2-1}x+\frac{e^2c^2-a^2}{e^2-1}-\frac{(y-b)^2}{e^2-1}=0$$

$$\left(x-\frac{ce^2-a}{e^2-1}\right)^2-\frac{(y-b)^2}{e^2-1}=\left(\frac{ce^2-a}{e^2-1}\right)^2-\frac{e^2c^2-a^2}{e^2-1}\quad\cdots(☆)$$

右辺について

$$\frac{1}{(e^2-1)^2}\{(ce^2-a)^2-(e^2c^2-a^2)(e^2-1)\}$$

$$=\frac{1}{(e^2-1)^2}\{c^2e^4-2ace^2+a^2-(c^2e^4-c^2e^2-a^2e^2+a^2)\}$$

$$=\frac{1}{(e^2-1)^2}\{e^2(a^2-2ac+c^2)\}$$

$$=\frac{1}{(e^2-1)^2}e^2(a-c)^2$$

(☆) に代入すると $\left(x-\dfrac{ce^2-a}{e^2-1}\right)^2-\dfrac{(y-b)^2}{e^2-1}=\dfrac{e^2(a-c)^2}{(e^2-1)^2}$

これより

$$\frac{\left(x-\dfrac{ce^2-a}{e^2-1}\right)^2}{\left\{\dfrac{e|a-c|}{e^2-1}\right\}^2}-\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{e\sqrt{e^2-1}\,|a-c|}{e^2-1}\right\}^2}=1$$

$0<e<1$ のとき

$$(x-a)^2+(y-b)^2=e^2(x-c)^2$$

$$x^2-2ax+a^2+(y-b)^2=e^2x^2-2ce^2x+e^2c^2$$

$$(1-e^2)x^2-2(a-ce^2)x+a^2-e^2c^2+(y-b)^2=0$$

両辺 $1-e^2$（>0）で割ると

$$x^2-2\cdot\frac{a-ce^2}{1-e^2}x+\frac{a^2-e^2c^2}{1-e^2}+\frac{(y-b)^2}{1-e^2}=0$$

$$\left(x-\frac{a-ce^2}{1-e^2}\right)^2+\frac{(y-b)^2}{1-e^2}=\left(\frac{a-ce^2}{1-e^2}\right)^2-\frac{a^2-e^2c^2}{1-e^2}$$

$e>1$ のときの計算過程と同様にして右辺を整理すると

$$\left(x-\frac{a-ce^2}{1-e^2}\right)^2+\frac{(y-b)^2}{1-e^2}=\frac{e^2(a-c)^2}{(1-e^2)^2}$$

これより

$$\frac{\left(x-\dfrac{a-ce^2}{1-e^2}\right)^2}{\left\{\dfrac{e|a-c|}{1-e^2}\right\}^2}+\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{e\sqrt{1-e^2}\,|a-c|}{1-e^2}\right\}^2}=1$$