座標平面上に点 O$(0, 0)$，A$(1, 0)$ をとる。この平面上の 2 点 P，Q を条件

(a)　$\mathrm{OP}=1$，$\angle\mathrm{AOP}\leqq\dfrac{\pi}{2}$　(b)　$\mathrm{PQ}=1$，$\angle\mathrm{OPQ}\geqq\dfrac{\pi}{2}$

を満たすように動かす。ただし，角の大きさは 0 から π までの範囲で測るものとする。

(1)　点 P が B$(0, 1)$ にあるとき，点 Q が動いてできる曲線を求め，図示せよ。

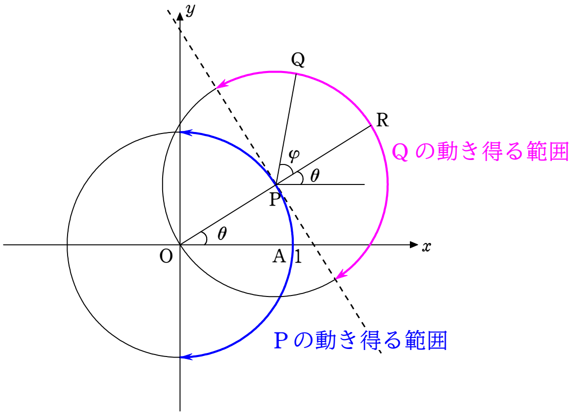
(2)　$\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{2}$ となるような点 Q のつくる曲線を求め，図示せよ。

(3)　点 Q の動く領域を求め，図示せよ。

< '04 青山学院大 >

【戦略】

ひとまず，どういう状況なのかを図示してみることにすると

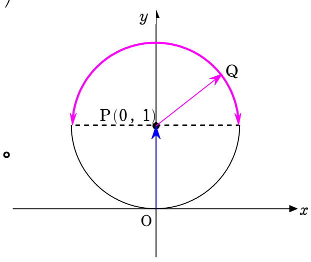


のような感じです。

これにより， $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$ **と θ，φ で立式できます。**

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ **のときを考えるわけですから，**

右の図となるのは目に見えるでしょう。
（記述はもう少し丁寧にします。）



(2)　$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$**，または** $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ **のときを考えることになります。**

これより， $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}f(\theta)\\ g(\theta)\end{pmatrix}$ **となります。**

これは Q(X, Y) が $\begin{cases}X=f(\theta)\\ Y=g(\theta)\end{cases}$ **とパラメータ表示できることを意味しています。**

Q の軌跡が求めたければ，θ を消去し，X，Y だけの関係式を Get しにいくという姿勢が大切です。

その際，θ に範囲がある以上，X，Y もそれに縛られるはずということで，軌跡の限界（範囲）に注意します。

(3)　$\begin{cases}X=\cos\theta+\cos(\theta+\varphi)\\ Y=\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)\end{cases}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

という一般論で，Q の動く領域をとらえていくわけです。

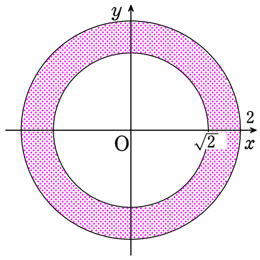
式的に攻めようと思えば，当然 θ，φ を消して X，Y の関係式を得ようとすると思います。

2 文字ありますが，まずは消しやすそうな θ を消してみます。

$$\begin{aligned}X^2+Y^2&=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\varphi)+2\cos\theta\cos(\theta+\varphi)\\&\quad+\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\varphi)+2\sin\theta\sin(\theta+\varphi)\\&=2+2\{\cos(\theta+\varphi)\cos\theta+\sin(\theta+\varphi)\sin\theta\}\\&=2+2\cos\{(\theta+\varphi)-\theta\}\\&=2+2\cos\varphi\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ **を動くので，$2\leqq2+2\cos\varphi\leqq4$ となります。**

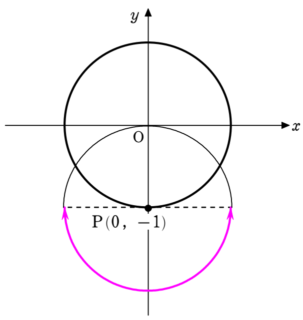
つまり，$2\leqq X^2+Y^2\leqq4$ なので



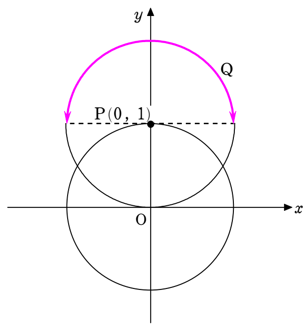
という円環部分に (X, Y) が存在することが分かりました。

ただ，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ という θ の範囲をどのように X，Y の範囲に結びつけるのかということを考えると，ここらで式的攻める路線は限界を感じる人も出てくるでしょう。

式でダメなら目で追っていく方向で考えたいとおもいます。



$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ **のとき**



$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ **のとき**

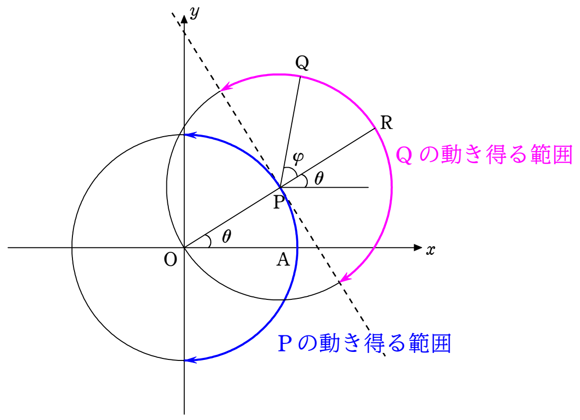
と，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で θ を動かしたときの半円の通過領域を考えればよいことになります。

理系生であれば，数Ⅲ の回転体のトピックスでよくやりますが，

回転の中心からの最大距離と最小距離に注目する

というモノの見方ができるかどうかは，差が付くかどうかの大きな分かれ目となります。

【解答】



(図 1)

(1)　条件 (a)，(b) より，P，Q の動き得る範囲は (図 1) の太線部のようになるため，

$$\angle \mathrm{AOP}=\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right),\quad \angle \mathrm{RPQ}=\varphi\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける。

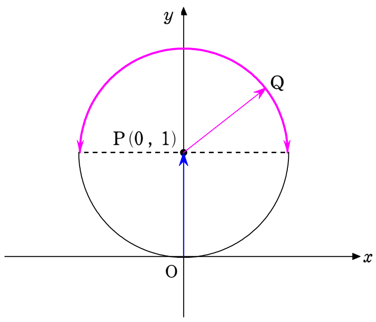
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$， $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$ であるため，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(1)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときを考えればよく

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

今 $-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ なので，$0\leqq\varphi+\frac{\pi}{2}\leqq\pi$ であるため，求める Q の存在範囲は以下の (図 2) の太線部である。



(図 2)

(2)　$\varphi=\frac{\pi}{2}$，または $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ のときを考えればよい。

(i)　$\varphi=\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta-\sin\theta\\ \sin\theta+\cos\theta\end{pmatrix}$$

Q $(X，Y)$ とすると，Q の軌跡は

$$\begin{cases}X=\cos\theta-\sin\theta\\ Y=\sin\theta+\cos\theta\end{cases}\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

という式で与えられる。

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{X+Y}{2}\ \cdots ①\\ \sin\theta=\dfrac{Y-X}{2}\ \cdots ②\end{cases}$$ であり，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるため

$\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2+\left(\frac{Y-X}{2}\right)^2=1$ であり，これを整理すると

$$X^2+Y^2=2\ \cdots(*)$$

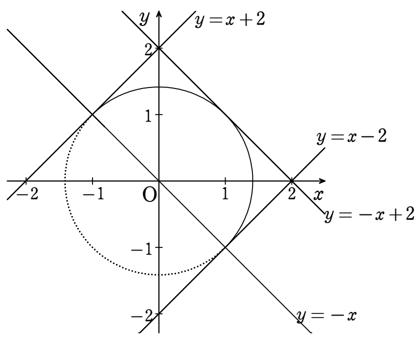
を得る。

また，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\cos\theta\leqq1$， $-1\leqq\sin\theta\leqq1$

①，② より，$\begin{cases}0\leqq\dfrac{X+Y}{2}\leqq1\\ -1\leqq\dfrac{Y-X}{2}\leqq1\end{cases}$

整理すると，$\begin{cases}-X\leqq Y\leqq -X+2\\ X-2\leqq Y\leqq X+2\end{cases}\ \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ をともに満たす Q $(X，Y)$ の軌跡が求めるものであり，これを xy 平面に図示すると以下の (図 3−1) の半円部分である。



(図 3−1)

(ii)　$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\sin\theta\\ \sin\theta-\cos\theta\end{pmatrix}$$

Q(X,Y)とすると，Qの軌跡は

$$\begin{cases}X=\cos\theta+\sin\theta\\ Y=\sin\theta-\cos\theta\end{cases}\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$$

という式で与えられる。

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{X-Y}{2}\quad\cdots①\\ \sin\theta=\dfrac{X+Y}{2}\quad\cdots②\end{cases}$$ であり，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるため

$\left(\dfrac{X-Y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{X+Y}{2}\right)^2=1$ であり，これを整理すると

$$X^2+Y^2=2\ \cdots(*)'$$

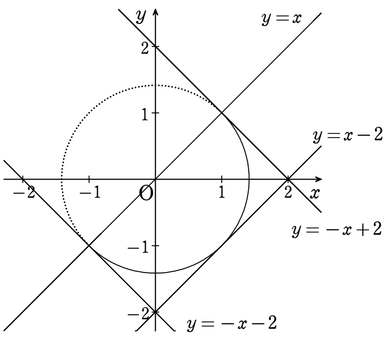
を得る。

また，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\cos\theta\leqq1$，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$

①，② より，$\begin{cases}0\leqq\dfrac{X-Y}{2}\leqq1\\ -1\leqq\dfrac{X+Y}{2}\leqq1\end{cases}$

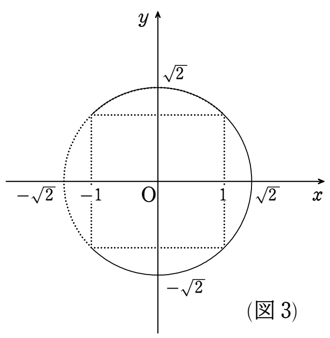
整理すると，$\begin{cases}X-2\leqq Y\leqq X\\ -X-2\leqq Y\leqq -X+2\end{cases}\ \cdots(**)'$

$(*)'$，$(**)'$ をともに満たす Q(X,Y) の軌跡が求めるものであり，これを xy 平面に図示すると以下の (図 3－2) の半円部分である。



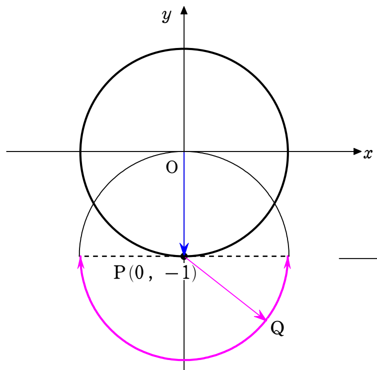
(図 3－2)

(図 3－1)，(図 3－2) を合わせたものが Q の軌跡であり，これを図示すると，以下の (図 3) のようになる。

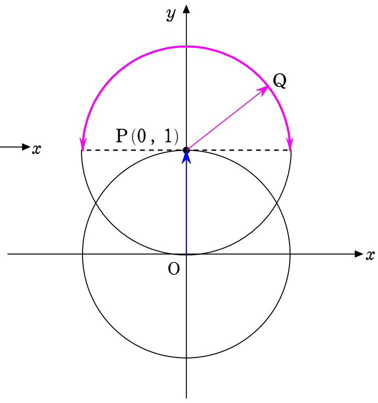


(図 3)

(3)



(図 4－1)



(図 4－2)

$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき，Q の軌跡は (図 4－1) のようになる。

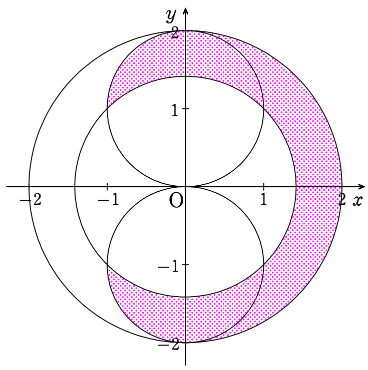
$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき， Q の軌跡は (図 4－2) のようになる。

P の回転運動に伴って，Q が動き得る半円も (図 4－1) の状態から (図 4－2) の状態になる。

(図 4－1) において，

回転の中心 (原点) からの $\begin{cases}\text{最大距離 は}\ \ 2\\ \text{最小距離 は}\ \sqrt{2}\end{cases}$

であることに注意すると，求める Q の動き得る領域は，以下の (図 4) の打点部となる。(ただし，境界線を含む)



(図 4)

【総括】

・目を凝らしてもよく分からないなら式に教えてもらう

・式的に処理するのが難しいなら，視覚化など目で捌くことができないか

できる人はこれらの方向性を無意識で使い分けています。

本問は式的に処理する部分 (1)，(2) にも「各種基本の運用」という糧となる部分があり，(3) では式的に攻める方向性から，目で追う方向性に柔軟に切り替えました。

まさに上記 2 点を 1 つの問題の中で体感できる問題だと思います。