複素数平面上の４点が同一円周上にある条件【類題】

相異なる 4 つの複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 に対して

$$w=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

とおく。このとき，以下を証明せよ。

(1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である。

(2) z_1，z_2，z_3，z_4 が単位円上にあるとき，w は実数である。

(3) z_1，z_2，z_3 が単位円上にあり，w が実数であれば，z_4 は単位円上にある。

＜ '99 京都大 ＞

【戦略 1】

(1) **必要十分条件であることを証明するので，**

$$z \text{ が単位円上} \implies \overline{z}=\frac{1}{z}$$

$$z \text{ が単位円上} \impliedby \overline{z}=\frac{1}{z}$$

の両方を示すわけです。

乱暴に $\iff$ を繋いでいくよりは，分けて考えた方が安全です。

(2) **w が実数であることを示すには $\overline{w}=w$ であることを目指します。**

(1) を用いて共役複素数を捌いていけばよいでしょう。

(3) **$|z_4|=1$ を目指すか，$\overline{z_4}=\dfrac{1}{z_4}$ を目指すかのどちらかです。**

わざわざ (1) を用意してくれていますから，$\overline{z_4}=\dfrac{1}{z_4}$ を目指しに行くのがこの流れでは自然でしょうか。

$w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ **を $z_4=$ と，z_4 に関して解きにいき，$\overline{z_4}$ を計算することを考えます。**

その際，目がチカチカしますから，置き換えを駆使しながら
目に優しく処理していきます。

z_4 を含む部分を取り出そうとして，$\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=w\cdot\boxed{\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}}$

とし，　の部分を z とおき，$\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=wz$ **とします。**

これより，$z_4=\dfrac{wzz_1-z_2}{wz-1}$ **を得て，ここから $\overline{z_4}$ を計算していきます。**

その際，分数に次ぐ分数が登場します。

うっとうしい $\overline{z}$ は先に計算しておくのが得策でしょう。

【解 1】

(1) z が単位円上 $\iff$ $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ であることを示す。

($\Longleftarrow$ の証明)

$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ のとき，$z\overline{z}=1$ で，$|z|^2=1$，すなわち $|z|=1$

よって，z は単位円上にある。

($\Longrightarrow$ の証明)

z が単位円上のとき $|z|=1$ 満たし，$|z|^2=1$ を満たす。

これより，$z\overline{z}=1$ を満たす。

$|z|=1$ なので，$z\neq 0$ であるから，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である。

(2) $$\overline{w}=\frac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}\quad(\because(1))$$

$$=\frac{\dfrac{z_3-z_1}{z_1z_3}\cdot\dfrac{z_4-z_2}{z_2z_4}}{\dfrac{z_4-z_1}{z_1z_4}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_2z_3}}$$

$$=\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}$$

$$=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

$=w$　となり，w は実数である。

(3) $w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ に対して，$\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=w\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$

$z=\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$ …① とおく。

このとき，$\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=wz$ であり，これを z_4 について解くと

$$z_4=\frac{wzz_1-z_2}{wz-1}\quad\cdots②$$

$wz=1$ とすると
$z_2-z_4=z_1-z_4$
で $z_1=z_2$ となり矛盾してしまいます。

ここで，① より，

$$\overline{z}=\frac{\overline{z_2}-\overline{z_3}}{\overline{z_1}-\overline{z_3}}=\frac{\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\quad\cdots③$$

© MathClinic

② より

$$\overline{z_4}=\frac{\overline{w}\ \overline{z}\ \overline{z_1}-\overline{z_2}}{\overline{w}\ \overline{z}-1}$$

w が実数であること，(1) の結果，③ より

目標を見据えれば見るべきパーツが浮き彫りになります。

z です

$$\overline{z_4}=\frac{w\cdot\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\cdot\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}{w\cdot\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}-1}$$

z です

$$=\frac{\dfrac{1}{z_2}(wz-1)}{w\cdot\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z-1}$$

$$=\frac{wz-1}{wzz_1-z_2}$$

$$=\frac{1}{z_4}$$

となり，(1) の結果から，z_4 は単位円上にある。

【戦略 2】(3) について

$|z_4|=1$ を目指す態度で考えてみます。

$w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ で，w が実数なので

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$$

であり，$\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$，$\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$，$\overline{z_3}=\dfrac{1}{z_3}$ を用いてほぐしていくことになります。

【解 2】(3) について

$w=\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ が実数であることから

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{(\overline{z_1}-\overline{z_3})(\overline{z_2}-\overline{z_4})}{(\overline{z_1}-\overline{z_4})(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$$

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{\left(\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_3}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\overline{z_4}\right)}{\left(\dfrac{1}{z_1}-\overline{z_4}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_3}\right)}$$

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=\frac{(z_3-z_1)(1-z_2\overline{z_4})}{(1-z_1\overline{z_4})(z_3-z_2)}$$

$$\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=\frac{1-z_2\overline{z_4}}{1-z_1\overline{z_4}}$$

$$(z_1-z_4)(1-z_2\overline{z_4})=(z_2-z_4)(1-z_1\overline{z_4})$$

$$z_1-z_1z_2\overline{z_4}-z_4+z_2z_4\overline{z_4}=z_2-z_1z_2\overline{z_4}-z_4+z_1z_4\overline{z_4}$$

$$z_1+z_2z_4\overline{z_4}=z_2+z_1z_4\overline{z_4}$$

$$z_1+z_2|z_4|^2=z_2+z_1|z_4|^2$$

$$z_1|z_4|^2-z_2|z_4|^2-(z_1-z_2)=0$$

$$(z_1-z_2)(|z_4|^2-1)=0$$

z_1，z_2 は相異なるという条件から，$z_1-z_2\fallingdotseq 0$ であり，$|z_4|^2=1$

これより，$|z_4|=1$ を得るため，z_4 は単位円上にある。

【総括】

(2) の有名事実を基にした論証の味付けが京大らしい味付けです。

© MathClinic