複素数平面上の４点が同一円周上にある条件

　複素数平面上で相異なる複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 が同一円周上にあるとき

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$$

は実数であることを証明せよ

＜ '01 名古屋大 ＞

【戦略】

$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$，$\mathrm{D}(z_4)$ **とし，与えられた形を，**

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\times\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$$

と見ます。

反時計回りを角度の正の向きとして

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ **を** $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ **に重ねる向きに回転させた回転量が** $\arg\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ **を** $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ **に重ねる向きに回転させた回転量が** $\arg\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$

ですから，角度に注目した

円周角の定理，及び　円に内接する四角形の対角和が $180°$

という方向性で仕留めることを考えていきます。

argument (**偏角**) **は向きがありますから，**4 **点の配置によって場合分けしていきます。**

4 **点の配置そのものは，円順列を考えれば** $(4-1)!=6$ **【通り】あります。**

最悪この 6 **通りを個別検証してもたかが知れていますが，ここでは**

(i)　A，B **が隣り合う位置関係にあるとき**

(ii)　A，B **が対角上の位置関係にあるとき**

と場合分けをしたいと思います。

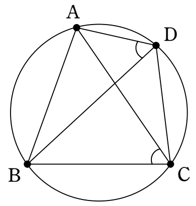
(i) **のときは上述したように，偏角による向きがありますからさらに場合分けをします。**

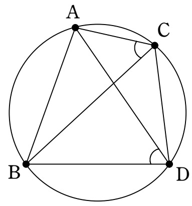
【解答】

$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$，$\mathrm{D}(z_4)$ とする。

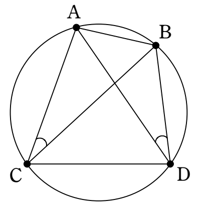
(i)　A と B が隣り合う位置関係のとき $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}$

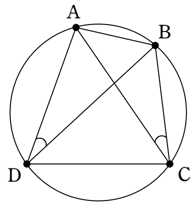
(i−1)





(i−2)





(i−1) のとき

$$\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\arg\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$$

$$\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}-\arg\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=0$$

$$\arg\frac{\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}}{\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_4}}=0$$

$$\arg\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}=0$$

ゆえに，$\dfrac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$ は (正の) 実数である。

したがって，$\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ も (正の) 実数となる。

(i−2) のとき

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

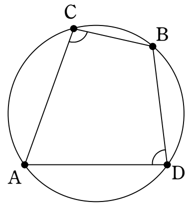
$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=0$$

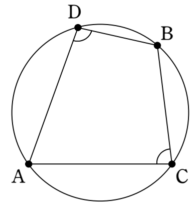
$$\arg\frac{\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}}{\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}}=0$$

$$\arg\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=0$$

ゆえに，$\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ は (正の) 実数である。

(ii)　A，B が対角上の位置関係にあるとき





$\angle\mathrm{ACB}+\angle\mathrm{ADB}=\pi$ であり，$\arg\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3}+\arg\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\pm\pi$

$$\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)=\pm\pi$$

ゆえに，$\dfrac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$ は (負の) 実数となる。

したがって，$\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ も (負の) 実数である。

以上，(i)，(ii) から，いずれにせよ $\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ は実数となる。

【総括】

ベクトル同様
ケツ－頭
と見ます

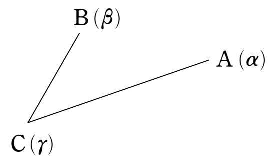
複素数平面における有名事実です。

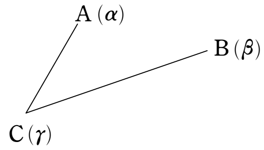
一般に，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ としたとき，$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ は

分母基準です

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に重ねるような回転量

です。





したがって，左の図だと，$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ は正の角度ですし，右の図だと負の角度となります。

つまり，単純に $\angle\mathrm{ACB}=\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ とすることはできないわけです。

【解答】の (i－1)，(i－2) はこの観点から場合分けをしています。

なお，2 つの複素数 z_1，z_2 に対して

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

としたとき，

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}(\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1))$$

であり

$$|z_1z_2|=r_1r_2\ ,\ \arg z_1z_2=\theta_1+\theta_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}\ ,\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2$$

が成り立つということは基本中の基本です。

本問の解答では $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2(=\arg z_1-\arg z_2)$ であることを空気のようにサラリと使っていますが，案外これらがスムーズにできない受験生が多いので，老婆心ながら補足しておきます。