O を原点とする座標空間において，4 点

$$\mathrm{A}(a\,,\,0\,,\,0),\ \mathrm{B}(0\,,\,b\,,\,0),\ \mathrm{C}(0\,,\,0\,,\,ab),\ \mathrm{H}\left(\frac{1}{a}\,,\,\frac{1}{b}\,,\,\frac{1}{ab}\right)$$

が同じ平面上にあるとする。ただし，$a$，$b$ は $a>1$，$b>1$ をみたす実数とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=1$ を示し，$b^2$ を $a$ を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $a$ を用いて表せ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最小となるような $a^2$ の値を求めよ。

＜ '09 大阪市立大 ＞

**【戦略 1】**

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ **を目指せばよく，成分計算をゴリゴリ進めていくだけです。**

(2) **3 点を指定すれば，その 3 点を通る平面の方程式が定まります。**

**特に，** $p\fallingdotseq 0$，$q\fallingdotseq 0$，$r\fallingdotseq 0$ **のとき** $(p\,,\,0\,,\,0)$，$(0\,,\,q\,,\,0)$，$(0\,,\,0\,,\,r)$ **という座標軸上の 3 点を通る平面の方程式は**

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

**と表せます。**

**H が平面 ABC 上であることを翻訳するのはこれが最も手っ取り早いでしょう。**

**これにより，** $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}=1$ **という関係式を得ます。**

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}$ **なので，**$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=1$ **は言えますし**

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}=1$ **を** $b^2$ **について解けば後半の題意も解決です。**

(3) **ベクトルの面積公式**

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

**を念頭に置きながら，必要な情報を集めに行けばいいでしょう。**

(4) (3) **が正しく計算できれば，**$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{a^4+a^2}{2(a^2-1)}$ **と得られていると思います。**

**この最小を考えるにあたり，まずは** $a^2=A\ (A>1)$ **と置き**

$\dfrac{A^2+A}{2(A-1)}$ **と次数を落として考えます。**

**この分数関数の最小を考えるにあたっては**

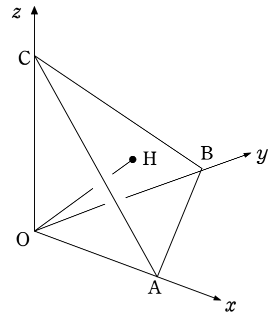
**帯分数化 → 相加・相乗平均の関係**

**という定番の流れで処理したいところです。**

【解 1】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$$




$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\ab\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\0\\ab\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a}\\\dfrac{1}{b}\\\dfrac{1}{ab}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+0\cdot\frac{1}{ab}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-a\cdot\frac{1}{a}+0\cdot\frac{1}{b}+ab\cdot\frac{1}{ab}=0$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であることが示された。

(2) 平面 ABC の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{ab}=1$

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{a}\,,\,\dfrac{1}{b}\,,\,\dfrac{1}{ab}\right)$ がこの平面上にあるため

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2b^2}=1\ \cdots①$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}=1$ を得て，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=1$ であることが示された。

また，① を整理すると

$$a^2+b^2+1=a^2b^2\ \cdots①$$

を得る。

これより，$(a^2-1)b^2=a^2+1$

条件 $a>1$ より $a^2>1$ なので，$b^2=\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

＜大袈裟だが＞

点と直線の距離を拡張した，「点と平面の距離」の関係を考えてみます。

$(p\,,\,q\,,\,r)$ と $ax+by+cz+d=0$ の距離は $\dfrac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

であり，それを用いると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}}}=1$$

とすることもできます。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a)\cdot(-a)+b\cdot 0+0\cdot ab=a^2$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

本問のような空間座標における三角形の面積を求めるにあたり必要な公式です。

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+a^2b^2)-a^4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(a^2+b^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2)\cdot(a^2b^2)}\quad(\because ①)$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{a^2+1}{a^2-1}$$

$$=\frac{a^4+a^2}{2(a^2-1)}\ \cdots 答$$

(4) $a^2=A\ (A>1)$ とおく。

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{A^2+A}{A-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(A+2+\frac{2}{A-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(A-1)+\frac{2}{A-1}+3\right\}$$

$$\geqq\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+3)\quad(\because \text{相加平均・相乗平均の関係})$$

等号が成立するとき，$A-1=\dfrac{2}{A-1}$ で，$(A-1)^2=2$

$A>1$ より，$A-1=\sqrt{2}$，すなわち $A=1+\sqrt{2}$

ゆえに，△ABC の面積が最小となるような $a^2$ の値は

$$a^2=1+\sqrt{2}\ \cdots 答$$

**【戦略 2】(2) について**

**点 H が平面 ABC 上にあることを**

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ($s$，$t$ は実数) **と表せる**

**と翻訳するのも王道です。**

【解 2】(2) について

H は平面 ABC 上の点なので，$s$，$t$ を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる。

これは $\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表せる。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s-t)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-s-t)a\\sb\\tab\end{pmatrix}$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\\frac{1}{b}\\\frac{1}{ab}\end{pmatrix}$ だから，$\begin{cases}(1-s-t)a=\dfrac{1}{a}\ \cdots(ア)\\ sb=\dfrac{1}{b}\ \cdots(イ)\\ tab=\dfrac{1}{ab}\ \cdots(ウ)\end{cases}$

(イ)，(ウ) より $s=\dfrac{1}{b^2}$，$t=\dfrac{1}{a^2b^2}$

これらを (ア) に代入し，$\left(1-\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2b^2}\right)a=\dfrac{1}{a}$

これより，$1-\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2b^2}=\dfrac{1}{a^2}$，すなわち $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}=1$ を得る。

（以下【解 1】に準ずる）

---

【コメント】

もちろん，$1-s-t=u$ などとおくことにより

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(u+s+t=1)$$

となります。

H は平面 ABC 上の点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (\alpha+\beta+\gamma=1)$$

と表せる。

と，最初からこのような設定をしてもよいでしょう。

【総括】

例題をやった後だと逆数の設定などが，いわく付きに感じます。

なお，本問で触れられていませんが，この H は △ABC の垂心にもなっています。

<確認>

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=0-\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\&=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}\\&=0-\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\\&=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=0\end{aligned}$$

であり，H は △ABC の垂心になっています。