数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & a_n>0 \text{ のとき} \\ n & a_n \leqq 0 \text{ のとき}\end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) $a_n=10000$ となる最小の n の値を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。$S_n \geqq 10000$ となる最小の n の値を求めよ。

＜ '19 名古屋市立大 ＞

【戦略】

実験してみると

$$1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 11,\ 10,\ 9,\ \cdots$$

というように 0 になったら再浮上する感じです。

再浮上するタイミングをとらえるために，群数列として考えることにします。

$$1,\ 0 \mid 2,\ 1,\ 0 \mid 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0 \mid 11,\ 10,\ \cdots\cdots$$

というイメージです。

各群の先頭の数についてですが，$a_{n+1}=n$ というルールによって浮上したものです。

ここは頭を使うところですが，$a_{n+1}=n$ の n というのは a_n の添え字です。

つまり，a_1 から a_n までの個数が n ということで

$$1,\ 0 \mid 2,\ 1,\ 0 \mid 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0 \mid 11,\ 10,\ \cdots\cdots$$

2 個

5 個

11 個

という規則性を見出したいところです。

したがって，初項から第 k 群の末項までの個数を b_k 個などと設定したくなります。

この設定から

$$\overbrace{1,\ 0 \mid \quad \mid \quad \mid \cdots\cdots\cdots \mid \quad 0}^{b_k \text{個}} \mid \overbrace{b_k \quad\quad 0}^{b_k+1\text{ 個}} \mid$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 k 群　第 $k+1$ 群

というイメージがもてれば，$b_{k+1}=b_k+(b_k+1)$，すなわち $b_{k+1}=2b_k+1$ という基本の漸化式が現れ，これにより，b_k が Get できます。

つまり，各群までの項数とともに，各群の先頭の数が Get できたことになりますから，ここから先は群数列に習熟していれば

群ごとに考え，はみ出た部分は手作業

というお馴染みの流れとなります。

【解答】

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次のルールに従って群に区切る。

(ルール)：各群の末項が 0 となるように区切る。

$$1,\ 0 \mid 2,\ 1,\ 0 \mid 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0 \mid 11,\ 10,\ \cdots\cdots$$

区切った群は前から第 1 群，第 2 群，… と呼ぶ。

第 k 群の末項までにある項数を b_k 個とする。

このとき，第 $k+1$ 群の先頭は b_k である。

$$\overbrace{1,\ 0 \mid \quad \mid \quad \mid \cdots\cdots\cdots \mid \quad 0}^{b_k \text{個}} \mid \overbrace{b_k \quad\quad 0}^{b_k+1\text{ 個}} \mid$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 k 群　第 $k+1$ 群

よって，$b_{k+1}=b_k+(b_k+1)$，すなわち $b_{k+1}=2b_k+1$

これは $b_{k+1}+1=2(b_k+1)$ と変形でき，

$$\begin{aligned} b_k+1 &= (b_1+1)\cdot 2^{k-1} \\ &= 3\cdot 2^{k-1} \end{aligned}$$

ゆえに，$b_k=3\cdot 2^{k-1}-1$

これより，$b_{k-1}=3\cdot 2^{k-2}-1$ $(k=2,\ 3,\ \cdots)$

第 k 群の先頭の項は $\begin{cases} 1\ (k=1) \\ 3\cdot 2^{k-2}-1\ (k \geqq 2)\end{cases}$ $\cdots(*)$

このとき，$3\cdot 2^{k-2}-1 \geqq 10000$ となる最小の k は $k=14$

ゆえに，最初に現れる 10000 は第 14 群である。

第 14 群の先頭は $(*)$ より，$3\cdot 2^{12}-1=12287$ である。

したがって

$$1,\ 0 \mid \quad \mid \quad \mid \cdots\cdots \mid \quad \mid \overbrace{12287,\ 12286,\ \cdots,\ 10000,}^{12287-10000+1=2288\text{ 個}}\ \cdots\ 0 \mid$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 13 群　第 14 群

よって，求める n の値は

$$\begin{aligned} n &= b_{13}+2288 \\ &= 12287+2288 \\ &= 14575 \ \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) 第 k 群の和を T_k と呼ぶと，

$$T_k=\begin{cases}1 & (k=1)\\ 1+2+\cdots\cdots+b_{k-1}=\dfrac{b_{k-1}(b_{k-1}+1)}{2} & (k\geqq 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{b_{k-1}(b_{k-1}+1)}{2}&=\frac{(3\cdot 2^{k-2}-1)\cdot 3\cdot 2^{k-2}}{2}\\&=3\cdot 2^{k-3}(3\cdot 2^{k-2}-1)\\&=9\cdot 2^{2k-5}-3\cdot 2^{k-3}\\&=9\cdot 4^k\cdot 2^{-5}-3\cdot 2^{-2}\cdot 2^{k-1}\\&=\frac{9}{8}\cdot 4^{k-1}-\frac{3}{4}\cdot 2^{k-1}\end{aligned}$$

第 m 群の末項までの総和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}T_k&=T_1+\sum_{k=2}^{m}T_k\\&=1+\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{9}{8}\cdot 4^{k-1}-\frac{3}{4}\cdot 2^{k-1}\right)\\&=1+\frac{9}{8}\cdot\frac{4(4^{m-1}-1)}{4-1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2(2^{m-1}-1)}{2-1}\\&=1+\frac{3}{2}(4^{m-1}-1)-\frac{3}{2}(2^{m-1}-1)\\&=\frac{3}{8}(2^m-1)^2+\frac{5}{8}\end{aligned}$$

$m=7$ とすると，$\dfrac{3}{8}(2^7-1)^2+\dfrac{5}{8}=6049$

$m=8$ とすると，$\dfrac{3}{8}(2^8-1)^2+\dfrac{5}{8}=24385$

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\geqq 10000$ となる最小の n に対する a_n は
第 7 群に入っており，第 7 群の N 番目だとする。

第 8 群の先頭の数は $b_7=3\cdot 2^6-1=191$

191，190，……，a_n（$=191-(N-1)$）の N 個の等差数列の和は，

$$\frac{N\{191+(192-N)\}}{2}=\frac{N(383-N)}{2}$$

$$\underbrace{1,\ 0}_{第1群}\ |\ \cdots\cdots\ |\ \ \underbrace{\ }_{第7群}\ \ |\ \underbrace{\overbrace{b_7,\ \cdots,\ a_n}^{N個},\ \cdots\cdots,\ 0}_{第8群}\ |$$

$S_n=6049+\dfrac{N(383-N)}{2}\geqq 10000$ となるときを考えると

$\dfrac{N(383-N)}{2}\geqq 3951$，すなわち $N(383-N)\geqq 7902$

$N=21$ とすると，$N(383-N)=21\cdot(383-21)=7602$

$N=22$ とすると，$N(383-N)=22\cdot(383-22)=7942$

ゆえに，求める n は

$$\begin{aligned}n&=b_7+22\\&=191+22\\&=213\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

一見群数列に見えないですが，手を動かしていくうちに群数列で考える必要性を嗅ぎ取る力が必要です。

パターン性が濃く，機械的な問題になりやすいこの分野において，
「その場力」が必要な部分や，各種数列分野の基本の運用を試す力を問う部分が随所に盛り込まれており，演習としてためになる良問だと思います。