n を自然数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{4n^2}+y^2=1$ と，双曲線 $\dfrac{x^2}{n^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$ の第 1 象限における交点の座標を (a_n, b_n) で表すとき，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(a_n-n)$

< '05 広島大 >

【戦略】

楕円の式と双曲線の式を連立すれば，具体的に a_n, b_n は立式できる見通しはあるので，ひとまずは連立方程式を解きにいきます。

$\begin{cases}\dfrac{a_n^2}{4n^2}+b_n^2=1\\ \dfrac{a_n^2}{n^2}-\dfrac{b_n^2}{n^2}=1\end{cases}$ **という連立方程式の処理を頑張るだけなので，ガッツで**

処理すると， $a_n^2=\dfrac{4n^2(n^2+1)}{4n^2+1}$, $b_n^2=\dfrac{3n^2}{4n^2+1}$ **を得ます。**

交点 (a_n, b_n) は第 1 象限の交点という条件もあり，$a_n>0$, $b_n>0$ であることから

$$a_n=\frac{2n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2+1}},\quad b_n=\sqrt{\frac{3n^2}{4n^2+1}}$$

を得るため，ここから各設問について考えればよいでしょう。

(1) $\dfrac{a_n}{n}=2\sqrt{\dfrac{n^2+1}{4n^2+1}}$ **で，$\dfrac{\infty}{\infty}$ タイプの不定形です。**

$\sqrt{\quad}$ 内で一番威張っている n^2 で分母・分子を割る定番の処理です。

(2) **これも，一番威張っている n^2 で分母・分子を割れば即解決です。**

(3) $n(a_n-n)=n^2\left(\dfrac{a_n}{n}-1\right)$ **と見れると (1) の結果がそのまま使えます。**

$$n(a_n-n)=n^2\left(\sqrt{\frac{4n^2+4}{4n^2+1}}-1\right)=\cdots=n^2\cdot\frac{2\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{4n^2+1}}$$

という部分までは手が止まることなく辿り着きたいところです。

しかし，このままだと $\infty\cdot\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$ という不定形祭りです。

ただ，この形であれば，「分子の有理化」が目に付くと思います。

ここまでくれば，手なりに進んでいくはずです。

【解答】

(a_n, b_n) が $\dfrac{x^2}{4n^2}+y^2=1$, $\dfrac{x^2}{n^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$ の第 1 象限における交点であることから

$$\begin{cases}\dfrac{a_n^2}{4n^2}+b_n^2=1 & \cdots ①\\ \dfrac{a_n^2}{n^2}-\dfrac{b_n^2}{n^2}=1 & \cdots ②\\ a_n>0 & \cdots ③\\ b_n>0 & \cdots ④\end{cases}$$

①，② を a_n^2, b_n^2 についての連立方程式と見なして解くと

$a_n^2=\dfrac{4n^2(n^2+1)}{4n^2+1}$, $b_n^2=\dfrac{3n^2}{4n^2+1}$ であり，③，④ から

$$a_n=2n\sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+1}},\quad b_n=\sqrt{\frac{3n^2}{4n^2+1}}$$

(1) $\dfrac{a_n}{n}=2\sqrt{\dfrac{n^2+1}{4n^2+1}}=2\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1\ \cdots 答$$

(2) $b_n=\sqrt{\dfrac{3n^2}{4n^2+1}}=\sqrt{\dfrac{3}{4+\frac{1}{n^2}}}$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots 答$$

(3) $n(a_n-n)=n^2\left(\dfrac{a_n}{n}-1\right)$

$$=n^2\left(2\sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+1}}-1\right)$$

$$=n^2\cdot\frac{2\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=n^2\cdot\frac{(2\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2+1})(2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1})}{\sqrt{4n^2+1}\,(2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1})}$$

$$=n^2\cdot\frac{4(n^2+1)-(4n^2+1)}{\sqrt{4n^2+1}\,(2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1})}$$

$$=\frac{3n^2}{\sqrt{4n^2+1}\,(2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1})}$$

$$=\frac{3}{\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}\cdot\dfrac{2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}{n}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\left\{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right\}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2(2+2)}=\frac{3}{8}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(a_n-n)=\frac{3}{8}\cdots 答$

【総括】

a_n，b_n が出せた段階で，それ以降の極限計算においては 楕円，双曲線 の要素はなくなり，不定形をきちんと解消できるかという極限の問題となります。

(3) は (1) を活用しようという気持ちで $n(a_n-n)=n^2\left(\dfrac{a_n}{n}-1\right)$ と見ましたが，小細工なしでぶつかったとしても

$$
\begin{aligned}
n\,(a_n-n)&=n\left(2n\sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+1}}-n\right)\\
&=n^2\left(2\sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+1}}-1\right)
\end{aligned}
$$

(以下【解答】に準じる)

と大したことはありません。