以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ をみたす実数 x，a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1) を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

＜ ’07 東京大 ＞

【戦略】

(1)　**定積分 $\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt$ を評価するわけで，定積分が面積を表していることを考えると，何かしらの面積評価を考えていきたいところです。**

最右辺の形を「$\frac{1}{2}\cdot$(高さ)$\cdot$(上底＋下底)」という台形の面積で見ることができれば，小さい方も同様に考えることができると思います。

(2)　$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\log t\Big]_{a-x}^{a+x}=\log\frac{a+x}{a-x}$ **であることから，結局 (1) は**

$$\frac{2x}{a}<\log\frac{a+x}{a-x}<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

という $\log$ を評価したものということになり，これを用いて $\log 2$ を評価したいわけです。

単純に考えれば，$\frac{a+x}{a-x}=2$，すなわち $a=3x$ となるようなものを考えたくなります。

ただこれだと，$\frac{x}{a}=\frac{1}{3}$ なので，左側の不等式に関して

$$\frac{2}{3}<\log 2$$

ということになり，$0.666\cdots<\log 2$ という甘い結果となってしまい失敗します。

リカバリーをどのようにするかですが，この面積評価によって得られる不等式は

a が固定されていれば幅が小さい (x が小さい)

x が固定されていれば，右にいく (a が大きい)

と精度が高まります。

ここでは $x=1$ と固定して考えます。

$\frac{a+1}{a-1}=k$ **とすると，$a+1=ka-k$ であり，$a=1+\frac{2}{k-1}$ を得ます。**

a を出来る限り大きくしようと思うと，k は小さくしたいですね。

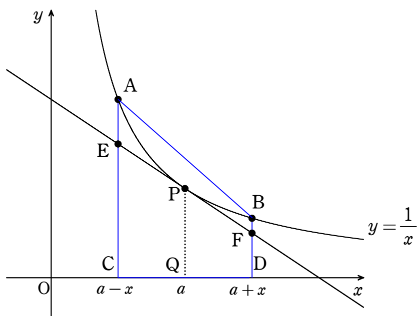
先ほどは $\log 2$ を直接作ろうと，$k=2$ として失敗しました。

「k を小さくしよう＆ $\log 2$ を登場させよう」

という気持ちでいると，次の候補は $k=\sqrt{2}$ でしょう。

【解答】

(1)



(図 1)

(図 1) のように点を定める。

$y=\frac{1}{x}$ について，$y'=-\frac{1}{x^2}$，$y''=2x^{-3}$ より，$x>0$ で $y=\frac{1}{x}$ は下に凸である。

ゆえに，(台形 CDFE の面積)$<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<$(台形 CDBA の面積)

$$\begin{aligned}(\text{台形 CDFE の面積})&=\frac{1}{2}(\mathrm{DF}+\mathrm{CE})\cdot\mathrm{CD}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{CD}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{a}\cdot 2x\\&=\frac{2x}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{台形 CDBA の面積})&=\frac{1}{2}(\mathrm{DB}+\mathrm{CA})\cdot\mathrm{CD}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x\\&=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\end{aligned}$$

したがって，$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$ が成立する。

(2)　$0<x<a$ に注意すると $\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\log t\Big]_{a-x}^{a+x}=\log\frac{a+x}{a-x}$

したがって，(1) の結果から

$$\frac{2x}{a}<\log\frac{a+x}{a-x}<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots(*)$$

ここで，$(*)$ において $x=1$，$a=3+2\sqrt{2}$ とすると

$$\frac{2}{3+2\sqrt{2}}<\log\sqrt{2}<\frac{1}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3+2\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\log 2<\frac{1}{4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{3+2\sqrt{2}}<\log 2<\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$4(3-2\sqrt{2})<\log 2<\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}-1\ \left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdots①$$

ここで，

$4(3-2\sqrt{2})>4(3-2\cdot1.414)=4\cdot(0.172)=0.688>0.68$ …②

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{1.42}{2}=0.71$ …③

①，②，③ より，$0.68<\log 2<0.71$ が成立する。

【戦略 2】(1) について　～ 方針のみ ～

(1) の段階から定積分を先に計算してしまうと

$$\frac{2x}{a}<\log\frac{a+x}{a-x}<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

を「証明」することになり，微分路線が自然に感じる形になります。

ただ，2 変数に関する扱いになります。

予選決勝法の要領で，1 文字固定という方針でもよいでしょう。

もしくは

$$2\cdot\frac{x}{a}<\log\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}<\frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}+\frac{\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}$$

と見て，$t=\dfrac{x}{a}$ $(0<t<1)$ とおき

$$2t<\log\frac{1+t}{1-t}<\frac{t}{1+t}+\frac{t}{1-t}$$

を証明するという処理もできます。

（この t への 1 変数化は同次式の処理の経験と，それを見逃さない観察力が必要です。）

【戦略 2】

【解 1】では $\sqrt{2}$ の近似値を用いました。

無理数の近似値を用いずに有理数のみで勝負したいということを考えてみます。

先ほど同様，$x=1$ として固定すると，a が大きくなれば，不等式の精度が高まります。

$\dfrac{a+1}{a-1}$ が有理数となるように a は 2 以上の整数として考えていきます。

そうなってくると，

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{6},\ \frac{9}{7},\ \cdots$$

と考えていくわけです。

$a=3$ として得られる，$\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{4}{2}$ は失敗したので，次は

$a=5$ として得られる $\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{6}{4}\left(=\dfrac{3}{2}\right)$ を選びたくなります。

このとき（$x=1$，$a=5$ のとき），$\dfrac{2}{5}<\log\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{12}$ を得ます。

$\log 3$ を消す必要が出てくるので，次は $a=7$ として得られる $\dfrac{8}{6}$ に注目して，$x=1$，$a=7$ とすると $\dfrac{2}{7}<\log\dfrac{4}{3}<\dfrac{7}{24}$ を得ます。

これにより，$\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}<\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}<\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24}$

すなわち，$\dfrac{24}{35}<\log 2<\dfrac{17}{24}$ を得ることになります。

$$\frac{24}{35}=0.685\cdots,\ \ \frac{17}{24}=0.708\cdots$$

なので，無事評価完了です。

【解 2】(2) について

（ $\dfrac{2x}{a}<\log\dfrac{a+x}{a-x}<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)\cdots(*)$ を得るところまでは同じ ）

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$(*)$ において

$x=1$，$a=5$ とすると，$\dfrac{2}{5}<\log\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{12}$ …（ア）を得る。

$x=1$，$a=7$ とすると，$\dfrac{2}{7}<\log\dfrac{4}{3}<\dfrac{7}{24}$ …（イ）を得る。

(ア)＋(イ) より，$\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}<\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}<\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24}$，すなわち

$$\frac{24}{35}<\log 2<\frac{17}{24}$$

$\dfrac{24}{35}=0.685\cdots$，$\dfrac{17}{24}=0.708\cdots$ であるため，

$$0.68<\log 2<0.71$$

が成立する。

【総括】

(1) で示した不等式中の，$\log\dfrac{a+x}{a-x}$ を $\log 2$ に見立てて $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ としてやっていく方針が行き詰まり，焦ると思います。

$\dfrac{a+x}{a-x}=\sqrt{2}$ とする方針は実際に登場する $\dfrac{1}{2}\log 2$ に関する不等式を最終的に 2 倍するので，誤差も 2 倍となるリスクがあったので，「今回はよかった」というぐらいの認識でいるべきかもしれません。

東大の数値評価は誘導を単純に運用しようとすると失敗し，

そこからどうリカバリーするか

という力が要求される類の問題が散見されます。

評価に失敗したとき，不等式の精度を高めようという気持ちがリカバリーへの第一歩であり，今回は視覚的イメージをもっていると

どうすれば不等式の精度が高くなるか (不等式の誤差が小さくなるか)

が見えやすくなったと思います。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

今回の $\log 2$ について

$$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010，\log_{10}3\fallingdotseq 0.4771$$

という常用対数の近似を用いて考えてみます。

常用対数はある程度覚えてしまっている人もいるかもしれませんので，それをベースに「底の変換公式」である程度のアタリをつけることができることを見てみます。

$$\begin{aligned}\log 2&=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}e}\\&\fallingdotseq\frac{\log_{10}2}{\log_{10}\frac{27}{10}}\\&=\frac{\log_{10}2}{3\log_{10}3-1}\\&\fallingdotseq\frac{0.3010}{3\cdot 0.4771-1}\\&=\frac{0.3010}{0.4313}\\&=\frac{3010}{4313}\\&=0.6978901\cdots\end{aligned}$$

と，大体こんなもんかというアタリがつきます。

ただ，近似に次ぐ近似をしているため，真の値に比べて大きいのか小さいのかまで知ろうと思うと，この式だけでは限界があり，あくまで目安程度のものです。(実際の真の値は $\log 2=0.6931\cdots$)