実数解の個数

自然数 n に対して，方程式

$$(1+x)^n=1+2^n x$$

の実数解の個数を求めよ。

＜ ’94 名古屋大 ＞

【戦略 1】

ひとまず，$(1+x)^n-(2^n x+1)=0$ という方程式で考えます。

$f(x)=(1+x)^n-(2^n x+1)$ と設定し，微分によりグラフの概形などの情報を掴みながら実数解の個数を調べていくことを考えます。

その際，
$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-2^n$ と 1 回の微分ではよく分かりませんから

$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$ ともう一度微分します。

なので，$n=1$，2 と $n\geqq 3$ で場合分けしたいと思います。

$n\geqq 3$ のときでも，$f''(x)$ の符号判定には n の偶奇が絡んできますから，さらにそこでも場合分けを行います。

【解答】

$f(x)=(1+x)^n-(2^n x+1)$ とおき，方程式 $f(x)=0$の実数解の個数を考える 。

(i)　$n=1$ のとき

$f(x)=-x$ なので，$f(x)=0$ の実数解は $x=0$ の 1 個

(ii)　$n=2$ のとき

$f(x)=(1+x)^2-(4x+1)=x(x-2)$ なので $f(x)=0$ の実数解は
$x=0$，2 の 2 個

(iii)　$n\geqq 3$ のとき

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-2^n$　，　$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$

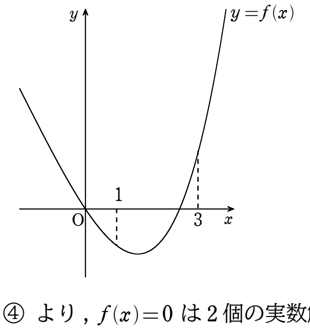
(iii−1)　n が 3 以上の偶数のとき

$f''(x)\geqq 0$ なので，$y=f(x)$ は下に凸のグラフである。…①

$f(0)=0$ …②

$f(1)=-1<0$ …③

$$\begin{aligned}f(3)&=2^{2n}-3\cdot 2^n-1\\&=2^n(2^n-3)-1>0 \text{ …④（} \because n \text{ は 3 以上の偶数）}\end{aligned}$$



①，②，③，④ より，$f(x)=0$ は 2 個の実数解をもつ。

(iii−2)　n が 3 以上の奇数のとき

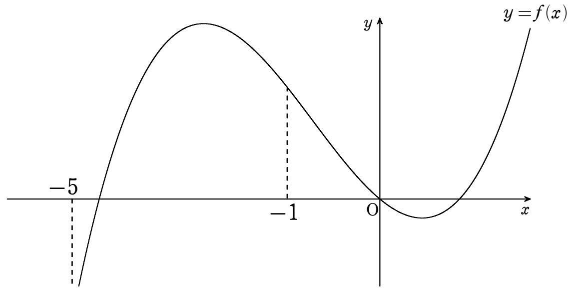
$x\geqq -1$ の範囲では $f''(x)\geqq 0$ より，(i) と同様にして $f(x)=0$ を満たす x が 2 つある。…⑤

$x<-1$ の範囲で調べる。

$x<-1$ の範囲では，$f''(x)<0$ なので，$y=f(x)$ は上に凸 …⑥

$f(-1)=2^n-1>0$ …⑦

$$\begin{aligned}f(-5)&=(-4)^n+5\cdot 2^n-1\\&=-2^{2n}+5\cdot 2^n-1 \text{（} \because n \text{ は奇数）}\\&=2^n(5-2^n)-1<0 \text{ …⑧（} \because n \text{ は 3 以上）}\end{aligned}$$



⑤，⑥，⑦，⑧ より，$f(x)=0$ は 3 個の実数解をもつ。

以上から，求める方程式の実数解の個数は

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき 1 個} \\ n \text{ が偶数のとき 2 個} \\ n \text{ が 3 以上の奇数のとき 3 個} \end{cases} \text{ …答}$$

【戦略 2】

$t=1+x$ と置き換えることによって n 乗の負担を減らすことを考えます。

なお，置き換えた後は $=0$ として考えると【解 1】に準じるような内容になりますので，ここでは，$t^n=1+2^n(t-1)$ のまま考えます。

$y=2^n(t-1)+1$ は傾きが 2^n で $(1,\ 1)$ を通る直線で，$y=t^n$ も $(1,\ 1)$ を必ず通るので，下手に $=0$ とするよりは考えやすいです。

【解 2】

$t=1+x$ とおくと，与えられた方程式は

$$t^n=1+2^n(t-1) \cdots (*)$$

であり，求める実数解の個数は $(*)$ を満たす実数 t の個数に等しい。

$y=t^n$，$y=2^n(t-1)+1$ のグラフの交点の個数を考えればよい。

以下，$f(t)=t^n$，$g(t)=2^n(t-1)+1$ とおく。

(i)　$n=1$ のとき，$y=t$，$y=2(t-1)+1$ のグラフの交点は 1 個

(ii)　n が 3 以上の奇数のとき

$f'(t)=nt^{n-1}$，$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$

$y=f(t)$ のグラフは $\begin{cases} t\geqq 0 \text{ の範囲で下に凸} \\ t\leqq 0 \text{ の範囲で上に凸} \end{cases} \cdots ①$

$y=f(t)$，$y=g(t)$ は n の値に関わらず $(1,\ 1)$ を必ず通る。$\cdots ②$

$(1,\ 1)$ における $y=f(t)$ の接線の傾きは $n \cdots ③$

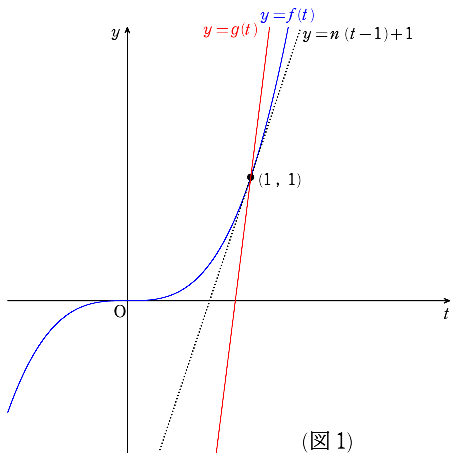
一方，直線 $y=g(t)$ の傾きは 2^n であり

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \\ &> {}_n\mathrm{C}_1\,(=n) \cdots ④ \end{aligned}$$

以上 ①，②，③，④ に注意し，以下の (図 1) を考えると
$y=f(t)$ と $y=g(t)$ のグラフは

$t>1$ の範囲で 1 個，$t<1$ の範囲で 1 個，$t=1$ で 1 個

と，合計 3 個の交点をもつ。



(図 1)

(ii)　n が偶数のとき

$y=f(t)$ のグラフは下に凸 $\cdots ①'$

$y=f(t)$，$y=g(t)$ は n の値に関わらず $(1,\ 1)$ を必ず通る。$\cdots ②'$

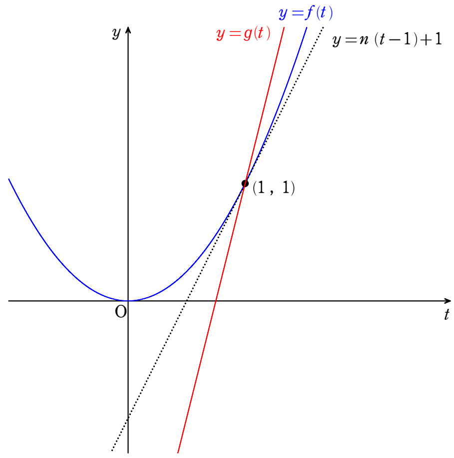
$(1,\ 1)$ における $y=f(t)$ の接線の傾きは $n \cdots ③'$

一方，直線 $y=g(t)$ の傾きは 2^n であり

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n \\ &> {}_n\mathrm{C}_1\,(=n) \cdots ④' \end{aligned}$$

以上 ①′，②′，③′，④′ に注意し，以下の (図 2) を考えると
$y=f(t)$ と $y=g(t)$ のグラフは

$t>1$ の範囲で 1 個，$t=1$ で 1 個と，合計 2 個の交点をもつ。



以上 (i)，(ii)，(iii) から，求める方程式の実数解の個数は

$\begin{cases} n=1 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ n \text{ が偶数のとき } 2 \text{ 個} \\ n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき } 3 \text{ 個} \end{cases} \cdots$ 答

【総括】

例えば最初に与えられた $(1+x)^n=1+2^n x$ を見ていると

「展開したら 1 の項は消えるから $x=0$ を解にもつな」
「 n が偶数だと負の解はもたないな」

などが目に付くでしょうか。

あるいは【解 2】の路線で，$1+x=t$ とおきなおし，$t^n=1+2^n(t-1)$ としたあとも，$t^n-2^n t+2^n-1=0$ とすると

$$(t^n-1)-2^n(t-1)=0$$
$$(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots\cdots+t+1)-2^n(t-1)=0$$
$$(t-1)\{(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots\cdots+t+1)-2^n\}=0$$

などという因数分解も目につきます。。
（$x=0$ を解にもつことが見えるのであれば，$t=1$ を解にもつことも見えるでしょう。）

色々見える分，うまくやろうとして逆に右往左往するという人も多いと思います。

色々見えるけど，愚直にゴリゴリ進めるのが結局は最短だった

という本問のような問題と試験場で出くわしたときに冷静な判断ができるかどうかというのは大きく運命を分けるかもしれません。