A，B，C，D，E の5人がプレゼントを1つずつ持ち寄って，くじ引きで交換することになった（ただし，自分の持ってきたプレゼントが自分に当たる場合もあり得る）。誰がどのプレゼントに当たるかはどれも同程度に起こりやすいとするとき，誰も自分が持ってきたプレゼントに当たらない確率を求めよ。

＜ '13 成城大 ＞

【戦略】

アルファベットよりも番号の方がこの後記述しやすいので，人に 1，2，… とゼッケンをつけ，その人が持ってきたプレゼントや箱にも同様に番号を振ります。

1番の人のプレゼントが1番の箱に入らない
2番の人のプレゼントが2番の箱に入らない
3番の人のプレゼントが3番の箱に入らない
⋮
n 番の人のプレゼントが n 番の箱に入らない

という入れ方を考えるわけです。（今回は $n=5$ のとき）

樹形図でゴリゴリに大木を作ってもいいですが，今回は勉強のために漸化式で処理する方法をとります。

この話題の漸化式の立て方は独特で

1番と k 番の人の単純交換が成立するかしないか

という観点で場合分けをします。

【解答】

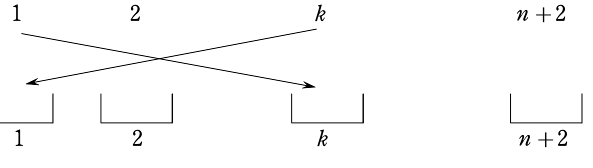
n 人の人に1から n までのゼッケンをつけ，その番号の人が持ってきたプレゼントと受け取る箱にも1から n の番号をつけ，プレゼントをランダムに箱に1つずつ入れることとする。

この n 人のプレゼント交換において，題意のように誰も自分の持ってきたプレゼントに当たらないような配り方を a_n 通りとする。

a_{n+2} について

(i)　1番の人と k 番の人のプレゼント交換が成立するとき

k の選び方は $2\sim n+2$ の $n+1$ 通り

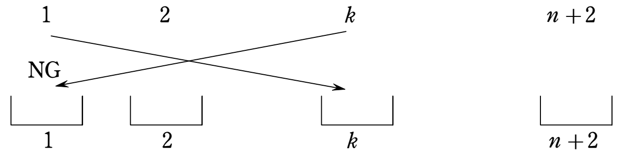


1，k 以外の残りの n 人が自分のプレゼントに当たらないような配り方は a_n 通り。

以上から，$(n+1)a_n$ 通り

(ii)　1番の人と k 番の人のプレゼント交換が成立しないとき

k の選び方は $2\sim n+2$ の $n+1$ 通り



2番のプレゼントは2番の箱に入れられない
3番のプレゼントは3番の箱に入れられない
⋮
k 番のプレゼントは1番の箱に入れられない
⋮
$n+2$ 番のプレゼントは $n+2$ 番の箱に入れられない

場合分けの前提

結局は1番以外の $n+1$ 人に対して，各人が入れられない箱が1つずつあり，$n+1$ 人のプレゼント交換の構造と同じである。

よって，1番以外のプレゼントの配り方は a_{n+1} 通り。

以上から $(n+1)a_{n+1}$ 通り

(i)，(ii) より，

$$a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n$$
$$=(n+1)(a_{n+1}+a_n)\ \cdots(*)$$

今，$a_1=0$，$a_2=1$ であるため，$(*)$ を順次使っていくと

$$a_3=2(a_2+a_1)=2$$
$$a_4=3(a_2+a_3)=9$$
$$a_5=4(a_3+a_4)=44$$

求める確率は $\dfrac{a_5}{5!}=\dfrac{11}{30}$ …答

【総括】

今回の話題は，完全順列，攪乱順列，モンモール数など色々な呼ばれ方をします。

日本語でゴタゴタ説明すると長くなるので，

プレゼント交換 → 自分の持ってきたプレゼントが当たらない
席替え → 自分の座っていた席に再度当たらない

など身近な話題をイメージした方が分かりやすいと思います。

【補足】

(*) である $a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n$ は

$$a_{n+2}-(n+2)\,a_{n+1}=-\{\,a_{n+1}-(n+1)a_n\,\}$$

と変形できます。

$$a_{n+2}-\{p\,(n+1)+q\}\,a_{n+1}=r\,\{\,a_{n+1}-(pn+q)\,a_n\,\}$$

と表したいわけです。

展開整理すると $a_{n+2}-(pn+p+q+r)a_{n+1}+r\,(pn+q)\,a_n=0$

元の漸化式は $a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n=0$ だったので

$\begin{cases} pn+p+q+r=n+1 \\ prn+rq=-n-1 \end{cases}$ がどちらも n の恒等式であるときを考え

$$\begin{cases} p=1 \\ p+q+r=1 \\ pr=-1 \\ rq=-1 \end{cases}$$

これより，$p=1$，$r=-1$，$q=1$ を得ます。

これより，数列 $\{a_{n+1}-(n+1)a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -1 の等比数列なので

$a_{n+1}-(n+1)a_n=(-1)^{n-1}$ ，すなわち

注：$(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$

$$a_{n+1}=(n+1)\,a_n+(-1)^{n+1}$$

を得ます。

この両辺を $(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a_n}{n\,!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n\,!}$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_2-b_1&=\frac{1}{2!} \\ b_3-b_2&=-\frac{1}{3!} \\ b_4-b_3&=\frac{1}{4!} \\ &\ \vdots \\ b_n-b_{n-1}&=\frac{(-1)^n}{n\,!} \end{aligned}$$

辺々加えて，

$$\begin{aligned} b_n-b_1&=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n\,!} \\ &=\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\left\{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n\,!}\right)\right\} \\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!} \end{aligned}$$

$b_1=0$ より，$\dfrac{a_n}{n\,!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!}$ であり，

$$a_n=n\,!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!}\quad \text{（これは } n=1 \text{ のときも成立する）}$$

これにより，$\dfrac{a_n}{n\,!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!}$ を得ます。

$$e^x=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

というテイラー展開において，$x=-1$ を代入すると $\dfrac{1}{e}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,!}$ です。

つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\,!}=\frac{1}{e}\ (\fallingdotseq 0.367\cdots)$ ぐらいになります。

$\dfrac{a_n}{n\,!}$ とは n 人でプレゼント交換をしたとき，誰も自分のプレゼントに当たらない確率です。

n が大きくなれば，自分の持ってきたプレゼントが当たってしまう可哀そうな人が 1 人ぐらいいそうですから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\,!}=0$ とならないのが不思議ですね。