　実数 $x$ に対し，$x$ 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。$a$，$b$ を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$$

が収束するような実数 $c$ の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

＜ '08 東京工業大 ＞

**【戦略】**

**実数 $x$ の小数点を切り上げたものを $f(x)$ と定めていますから一般論としては**

$$f(x)-1<x\leqq f(x)$$

**という関係が成り立ちます。（【解答】では目に優しく，置き換えます）**

**これを基に，$x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$ を「はさみにいこう」という気持ちをもちたいところです。**

**ここからは手なりに頑張ると**

$$\frac{(b-a)x^{c+1}+9x^c}{(ax-6)(bx+3)}<x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)<\frac{(b-a)x^{c+1}+11x^c}{(ax-7)(bx+4)}$$

**とはさめるはずです。**

**もちろんここから，はさみうちに照準を合わせて最左辺，最右辺の分母分子の次数を眺めます。**

**分母は 2 次なので，分子が 2 次以下であれば収束します。**

**ここで，$a=b$ か $a\fallingdotseq b$ かの場合分けが必要であることに気づくでしょう。**

**$a\fallingdotseq b$ であれば，$c+1=2$，すなわち $c=1$ が最大値で $\dfrac{b-a}{ab}$ に収束します。**

**$a=b$ のときが問題です。このとき**

$$\frac{9x^c}{(ax-6)(ax+3)}<x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)<\frac{11x^c}{(ax-7)(ax+4)}$$

**で，はさみうちに失敗してしまいます。**

**ただ，よく観察してみると**

$$\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}=\frac{f(ax+3)-f(ax-7)}{f(ax-7)f(ax+3)}$$

$$=\frac{10}{f(ax-7)f(ax+3)}$$

**です。**

**なぜなら，$(ax+3)-(ax-7)=10$ です。**

**例えば，$(ax-7)$ が整数だと，$(ax+3)=10+(ax-7)$（＝整数）となります。**

**つまり，片方だけ整数ということはありえませんから，**

**幅が 10 なら，切り上げても幅 10**

**ということが言えるわけです。**

**ここからは手なりに進められます。**

【解答】

$f(ax-7)=m$，$f(bx+3)=n$　とおく。

$f(x)$ という値の定め方から，$\begin{cases} m-1<ax-7\leqq m \\ n-1<bx+3\leqq n \end{cases}$

これより，$\begin{cases} ax-7\leqq m<ax-6 \\ bx+3\leqq n<bx+4 \end{cases}\cdots(*)$

今，$x\to\infty$ のときを考えるので，$x$ は十分大きな値として考えてよく $a$，$b$ が正の実数であるという条件も加味すれば

$$ax-7>0,\ bx+3>0$$

として考えてもよい。

ゆえに，$\begin{cases} \dfrac{1}{ax-6}<\dfrac{1}{m}\leqq\dfrac{1}{ax-7} \\ \dfrac{1}{bx+4}<\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{bx+3} \end{cases}$

これより，$\dfrac{1}{ax-6}-\dfrac{1}{bx+3}<\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{ax-7}-\dfrac{1}{bx+4}$

以上から

$$\frac{(b-a)x+9}{(ax-6)(bx+3)}<\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}<\frac{(b-a)x+11}{(ax-7)(bx+4)}$$

を得て，辺々 $x^c$（$>0$）をかけると

$$\frac{(b-a)x^{c+1}+9x^c}{(ax-6)(bx+3)}<x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)<\frac{(b-a)x^{c+1}+11x^c}{(ax-7)(bx+4)}$$

となる。

(i)　$a=b$ のとき

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$$

　今，$(*)$ より，$\begin{cases} ax-7\leqq m<ax-6 \\ ax+3\leqq n<ax+4 \end{cases}$ であり，

$$(ax+3)-(ax-6)<n-m<(ax+4)-(ax-7)$$

　すなわち，$9<n-m<11$ であり，$n-m$ は整数より，$n-m=10$

　つまり，$\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{10}{mn}\left(=\dfrac{10}{f(ax-7)f(ax+3)}\right)$

　また，$(ax-7)(ax+3)\leqq mn<(ax-6)(ax+4)$ であるため

$$\frac{1}{(ax-6)(ax+4)}<\frac{1}{mn}\leqq\frac{1}{(ax-7)(ax+3)}$$

$$\frac{10x^c}{(ax-6)(ax+4)}<\frac{10x^c}{mn}\leqq\frac{10x^c}{(ax-7)(ax+3)}$$

$$\frac{10x^{c-2}}{\left(a-\dfrac{6}{x}\right)\left(a-\dfrac{4}{x}\right)}<x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)\leqq\frac{10x^{c-2}}{\left(a-\dfrac{7}{x}\right)\left(a+\dfrac{3}{x}\right)}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するためには

$$c \leqq 2$$

が必要である。

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するときの $c$ の最大値は 2 で，そのときの収束値は，はさみうちの原理から

$$\frac{10}{a^2}$$

(ii)　$a \fallingdotseq b$ のとき

$$\frac{(b-a)x^{c+1}+9x^c}{(ax-6)(bx+3)} < x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right) < \frac{(b-a)x^{c+1}+11x^c}{(ax-7)(bx+4)}$$

より，

$$\frac{(b-a)x^{c-1}+9x^{c-2}}{\left(a-\frac{6}{x}\right)\left(b+\frac{3}{x}\right)} < x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right) < \frac{(b-a)x^{c-1}+11x^{c-2}}{\left(a-\frac{7}{x}\right)\left(b+\frac{4}{x}\right)}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するためには

$$c \leqq 1$$

が必要。

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するときの $c$ の最大値は 1 で，そのときの収束値は，はさみうちの原理から

$$\frac{b-a}{ab}$$

以上 (i), (ii) から

$$\begin{cases} a=b \text{ のとき } c \text{ の最大値は 2 で，そのときの極限値は } \dfrac{10}{a^2} \\ a \fallingdotseq b \text{ のとき } c \text{ の最大値は 1 で，そのときの極限値は } \dfrac{b-a}{ab} \end{cases} \cdots 答$$

【総括】

いわゆる天井関数 (ceiling function) というものが今回の $f(x)$ で，発散速度について考察させるという $+\alpha$ の要素もありました。

東工大らしい「頭に血を昇らせるような」問題で，難易度に対して試験場での出来具合はそこまでよくはないと思います。

【解答】では今回の趣旨にあわせて

ターゲットをはさみにいく

という，一応多くの人がとるであろう方針を第一の解答としました。

もちろんこれはこれで大切な態度です。

ただ，$x$ が十分大きいとき

$f(x)$ も $x$ もほとんど同じやろ

というざっくりとした感覚があれば

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\begin{cases} ax-7 \leqq f(ax-7) < ax-6 \\ bx+3 \leqq f(bx+3) < bx+4 \end{cases} \text{ より，} \begin{cases} a-\dfrac{7}{x} \leqq \dfrac{f(ax-7)}{x} < a-\dfrac{6}{x} \\ b+\dfrac{3}{x} \leqq \dfrac{f(bx+3)}{x} < b+\dfrac{4}{x} \end{cases}$$

なので，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax-7)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx+3)}{x}=b$

$a \fallingdotseq b$ のときは

$$x^c\left\{\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right\} = x^{c-1}\left\{\frac{x}{f(ax-7)}-\frac{x}{f(bx+3)}\right\}$$

$c=1$ が最大値でそのときの収束値は $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\left(=\dfrac{b-a}{ab}\right)$

$a=b$ のときは

$$\begin{aligned} x^c\left\{\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(ax+3)}\right\} &= x^c\cdot\frac{10}{f(ax-7)f(ax+3)} \\ &= x^{c-2}\cdot 10\cdot\frac{x}{f(ax-7)}\cdot\frac{x}{f(ax+3)} \end{aligned}$$

$c=2$ が最大値でそのときの収束値は $\dfrac{10}{a^2}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

と，スッキリまとまります。