天井関数と床関数に関する極限

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。 n を正の整数とし，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\,\right]}{n^2}$ とおく。

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

＜ '00 大阪大 ＞

【戦略】

ガウス記号 $[x]$ の性質として

$$x-1<[x]\leqq x$$

というものがあります。

$[x]$ が絡んだ極限は，この不等式を材料にはさみうちの原理で仕留めるというオチが鉄板です。

実際の極限計算の運用能力は，はさみうちの際の

最左辺，最右辺の極限計算

の部分で問われます。

今回は

極限計算の要は「区分求積法」

積分計算の要は「円の一部形」

を手際よく捌いていきたいところです。

【解答】

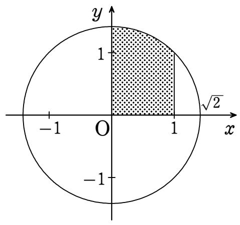
$\sqrt{2n^2-k^2}-1<\left[\sqrt{2n^2-k^2}\,\right]\leqq\sqrt{2n^2-k^2}$ であることから

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\,\right]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

$k=1,2,\cdots,n$ まで代入して辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}\quad\cdots①$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$



ここで，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$ は右の図の打点部の円の一部の面積を表すので

$$\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\quad\cdots②$

一方，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

①，②，③，及びはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\quad\cdots 答$$

【総括】

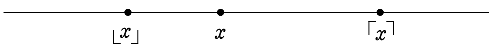
整数問題などで現れるガウス記号は難問になることが多いのですが，数Ⅲの極限に関わる問題では，割と一本道であり，方針面ではさほど難しくはありません。

試験場であればガウス記号に怯まずに立ち向かっていきたいところです。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

ガウス記号 $[x]$ は小数部分を切り捨てた整数を拾う記号です。

それに対して，小数部分を切り上げた整数を拾う記号 $\lceil x \rceil$ というものもあります。



小数部分を切り捨てる場合，$[x]$ という記号を用いるのが広く普及していますが，切り上げを $\lceil x \rceil$ と表すのと対比させるよう，切り捨てるときに $\lfloor x \rfloor$ という記号を使うこともあります。

実数 x に対して

$\lceil x \rceil$ を天井関数 (ceiling function)

$\lfloor x \rfloor$ を床関数（ floor function ）

という呼び方をすることもあります。