

増減表の継ぎはぎ

(1) 加法定理を用いて次の等式を証明せよ。

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

(2) 区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、次の方程式の解をすべて求めよ。

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

(3) 関数 $f(x)$ を次の式で定める。

$$f(x) = \sin x + \cos x + \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{3} + \frac{\sin 4x + \cos 4x}{4}$$

このとき、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で関数 $f(x)$ が極大となる x の値と極小となる x の値をすべて求めよ。また、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で、 $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

< '07 東京理科大 >

【戦略】

$$(1) \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots ① \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots ② \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots ③ \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots ④ \end{cases}$$

に対して、 $\sin + \sin$ や $\cos + \cos$ の形を作るために

①+②, ③+④ を計算します。

(2) (1) の設問の位置づけから、和積公式を使えという声が聞こえてくると思えます。

$$(\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$(\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x) = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

というペアで見て和積公式を用いることで、辺々引けばよいでしょう。

$$(\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) - \{(\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x)\}$$

$$= 2 \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) - 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right)$$

$$= 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right)$$

より、 $4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right) = 0$ を解けばよいわけです。

(3) もちろん $f'(x)$ を計算するわけですが、

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \cos 2x - \sin 2x + \cos 3x - \sin 3x + \cos 4x - \sin 4x$$

という(2)の途中経過で変形した式が現れますから

$$f'(x) = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right)$$

となります。

f' の符号を把握するために、区間を区切って分かりやすく整理していきます。

【解答】

$$(1) \text{ 加法定理より } \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots ① \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots ② \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots ③ \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots ④ \end{cases}$$

$$①+② \text{ より, } \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ とおくと, } \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \text{ であり}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$③+④ \text{ より, } \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ とおくと, } \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \text{ であり}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(2) (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$(\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x) = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

辺々引くことで

$$(\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) - \{(\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x)\}$$

$$= 2 \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) - 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right)$$

$$= 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right) \dots ⑤$$

よって、与えられた方程式は

$$\cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right) = 0$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において

$$(i) \cos x = 0 \text{ のとき, } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$(ii) \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ のとき, } 0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi \text{ より } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \pi$$

$$(iii) \cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} = 0 \text{ のとき, } 1 - \tan \frac{5x}{2} = 0$$

$$\text{ゆえに, } \tan \frac{5x}{2} = 1 \left(0 \leq \frac{5x}{2} \leq 5\pi \right) \text{ より}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi, \text{ すなわち}$$

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9}{10}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

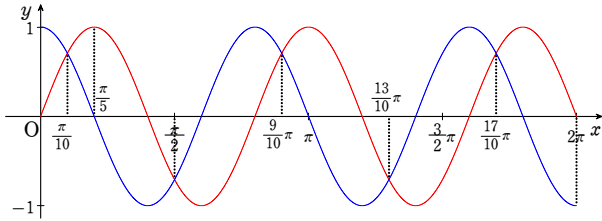
以上から求める方程式の解は

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9}{10}\pi, \pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{17}{10}\pi \dots \text{答}$$

(3) $f'(x) = \cos x - \sin x + \cos 2x - \sin 2x + \cos 3x - \sin 3x + \cos 4x - \sin 4x$

⑤ より, $f'(x) = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} \right)$

$y = \cos \frac{5x}{2}$ と, $y = \sin \frac{5x}{2}$ のグラフを, (2) の結果を利用しながら交点の x 座標にも気を付けて書くと, 以下の (図1) のようになる。



(図1)

(ア) : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos x \geq 0, \cos \frac{x}{2} \geq 0$

(図1) のグラフの上下も見ながら $f'(x)$ の符号を判断すると

x	0	...	$\frac{\pi}{10}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$		↗		↘	

(イ) : $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき, $\cos x \leq 0, \cos \frac{x}{2} \geq 0$

(図1) のグラフの上下も見ながら $f'(x)$ の符号を判断すると

x	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{9}{10}\pi$...	π
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$		↘		↗	

(ウ) : $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ のとき, $\cos x \leq 0, \cos \frac{x}{2} \leq 0$

(図1) のグラフの上下も見ながら $f'(x)$ の符号を判断すると

x	π	...	$\frac{13}{10}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$		↘		↗	

(エ) : $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ のとき, $\cos x \geq 0, \cos \frac{x}{2} < 0$

(図1) のグラフの上下も見ながら $f'(x)$ の符号を判断すると

x	$\frac{3}{2}\pi$...	$\frac{17}{10}\pi$...	2π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$		↘		↗	

以上(ア), (イ), (ウ), (エ) より, $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減表は

x	0	...	$\frac{\pi}{10}$...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{9}{10}\pi$...	π	...	$\frac{13}{10}\pi$...	$\frac{3}{2}\pi$...	$\frac{17}{10}\pi$...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$		↗		↘		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

のようになる。

極大となる x は $x = \frac{\pi}{10}, \pi, \frac{3}{2}\pi \dots \text{答}$

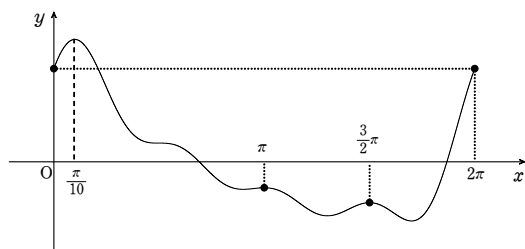
極小となる x は $x = \frac{9}{10}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi \dots \text{答}$

さて, 最大となる可能性は $f\left(\frac{\pi}{10}\right), f(\pi), f\left(\frac{3}{2}\pi\right), f(2\pi)$

増減表より, $f\left(\frac{\pi}{10}\right) > f(0) (= f(2\pi))$

$$f(\pi) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \left(< f(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \left(< f(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$$



これより, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f(x)$ が最大となる x の値は

$$x = \frac{\pi}{10} \dots \text{答}$$

【総括】

段階を踏んで設問にしてくれてはいますが, かなりエネルギーを使います。

$f'(x)$ の符号を把握しやすくするために, $\cos x, \cos \frac{x}{2}$ の符号が確定する区間に分割して分けて考えました。

区間ごとに増減表を作って, 最後にそれを継ぎはぎして全体像を把握します。