2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ があり，任意の自然数 n について $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れる。

このとき，定数 a，b の値を全て求めよ。

＜ ’68 大阪大 ＞

【戦略】

例題と違い，実際に $f(x^n)$ を $f(x)$ で割り算することは困難です。

この問題が「全称命題」ということに気が付かないとほとんど手が付けられないでしょう。

全称命題とは「全ての ○ について □ が成り立つ」というタイプの命題のことです。
この全称命題の倒し方はまず必要条件を求めるというところにあります。

全ての自然数 n について題意を満たすのであれば，当然 $n=2$ のときにも題意を満たしていなければいけません。

そこで $n=2$ のときに題意をみたすものを調べると

$$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 1)$$

だと分かります。

しかし，この段階ではまだ答えの資格はありません。

なぜなら，この段階で求めた a，b は $n=2$ のときに成り立つ a，b であって，その他の任意の自然数に対して題意を満たすかどうかがまだ定かではないからです。

なのでこれらの a，b がその他の n に対してもちゃんと題意を満たすかどうかをチェックすることになります。

このように全称命題はひとまず「簡単なもので答えの候補」をあぶり出し，それが答えとして正しいかどうかをチェックするという態度の攻め方をします。

【解答】

任意の自然数 n について題意を満たすには，$n=2$ のときにも題意を満たす必要がある。

$n=2$ のとき，$f(x^2)=x^4+ax^2+b$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax+a^2+a-b \\ \hline
x^2+ax+b & x^4 \qquad +ax^2 \qquad\qquad +b \\
 & x^4+ax^3 \quad +bx^2 \\ \hline
 & -ax^3+(a-b)x^2 \qquad\qquad +b \\
 & -ax^3-a^2x^2 \qquad -abx \\ \hline
 & (a^2+a-b)x^2 \quad +abx \quad +b \\
 & (a^2+a-b)x^2+a(a^2+a-b)x+b\,(a^2+a-b) \\ \hline
 & -a\,(a^2+a-2b)x-b\,(a^2+a-b-1)
\end{array}$$

となり，余りは $-a\,(a^2+a-2b)x-b\,(a^2+a-b-1)$

これが 0 となる，すなわち

$$-a\,(a^2+a-2b)x-b\,(a^2+a-b-1)=0$$

が x の恒等式となればよいので

$$\begin{cases} a\,(a^2+a-2b)=0 & \cdots ① \\ b\,(a^2+a-b-1)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

(i)　$a=0$ のとき，② から $b\,(-b-1)=0 \iff b=0,\ -1$

(ii)　$a\neq 0$ のとき，① より $a^2+a-2b=0$，すなわち $a^2+a=2b$

これを② に代入して，

$$b\,(2b-b-1)=0 \iff b\,(b-1)=0 \iff b=0,\ 1$$

$b=0$ のとき $a^2+a=0$ より $a=-1$ ($\because a\neq 0$)

$b=1$ のとき $a^2+a=2 \iff (a+2)(a-1)=0 \iff a=-2,\ 1$

以上から

$$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 1)$$

であることが必要である。

逆に十分性を示す。

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき

$f(x^n)=x^{2n}=(x^2)^n=\{f(x)\}^n$ となり，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる。

$(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x^n)&=x^{2n}-1 \\ &=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-3}+\cdots\cdots+1) \\ &=f(x)(x^{2n-2}+x^{3n-3}+\cdots\cdots+1) \end{aligned}$$

となり，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる。

$(a,\ b)=(-1,\ 0)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x^n)&=x^{2n}-x^n \\ &=x^n(x^n-1) \\ &=x^n(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1) \\ &=x(x-1)x^{n-1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1) \\ &=f(x)x^{n-1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1) \end{aligned}$$

となり，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる。

$(a, b)=(-2, 1)$ のとき

$$\begin{aligned} f(x^n)&=x^{2n}-2x^n+1\\ &=(x^n-1)^2\\ &=\{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)\}^2\\ &=(x-1)^2(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)^2\\ &=f(x)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)^2 \end{aligned}$$

となり，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる。

$(a, b)=(1, 1)$ のとき

$f(x)=x^2+x+1$ であり，$f(x^3)=x^6+x^3+1$

$f(x^3)$ が $f(x)$ で割り切れると仮定すると，商を $Q(x)$ として

$$f(x^3)=(x^2+x+1)Q(x)$$

とおける。

ここで，$x^2+x+1=0$ の解の一つを ω とすると，

$$f(\omega^3)=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)=0$$

ところが，$f(\omega^3)=\omega^6+\omega^3+1=1+1+1=3$
（$\because$ $\omega^2+\omega+1=0$ の両辺に $\omega-1$ をかけると $\omega^3-1=0$，すなわち $\omega^3=1$）

よって，矛盾する。

これより，$f(x^3)$ が $f(x)$ で割り切れないことになり，題意に反する。

以上より，求める a，b の値の組は

$$(a, b)=(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-2, 1)$$ ……答

【総括】

本問は全称命題だという壁をクリアーしたとしても、十分性をチェックする際に様々な基本事項が出てきます。

①：x^n-1 の因数分解

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$$

これは常識にしておいてください。

②：1の3乗根 ω について

$x^3=1$，すなわち $(x-1)(x^2+x+1)=0$ の解は，

$$x=1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

この虚数解のうちどちらかを ω とすると他方は ω^2 となります．

この ω は当然 $\omega^3=1$ を満たすことになります。

$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=0$（係数が全て1の代数方程式）の解を $x=\alpha$ とすると，$\alpha^n=1$ となります。

もちろん，根拠は ① の因数分解です。