$f(0)=1$ で，$f(x^2)$ が $f(x)$ で割り切れるような 2 次式 $f(x)$ をすべて求めよ。

＜ '99 防衛大 ＞

【戦略 1】

$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$ を $f(x)$ で割った商は 2 次式で，余りが 0 という状況です。

最高次の係数と定数項に注意すれば

$$ax^4+bx^2+1=(ax^2+bx+1)(x^2+cx+1)$$

と表せますので，ここから恒等式の処理を施すことを考えます。

【解 1】

$f(0)=1$ を満たす 2 次式 $f(x)$ は

$$f(x)=ax^2+bx+1 \ (a\neq 0)$$

とおける。

$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$ が $f(x)$ で割り切れるので

$$ax^4+bx^2+1=(ax^2+bx+1)(x^2+cx+1)$$

と表せる。

$$ax^4+bx^2+1=ax^4+(ac+b)x^3+(a+bc+1)x^2+(b+c)x+1$$

が x の恒等式より

$$\begin{cases} ac+b=0 & \cdots ① \\ a+bc+1=b & \cdots ② \\ b+c=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ より，$c=-b$

①，② に代入すると $\begin{cases} -ab+b=0 & \cdots ①' \\ a-b^2+1=b & \cdots ②' \end{cases}$

①′ より，$b(1-a)=0$ で，$b=0$ または $a=1$

(i) $b=0$ のとき ②′ より $a+1=0$ で $a=-1$

(ii) $a=1$ のとき ②′ より $1-b^2+1=b$，すなわち $b^2+b-2=0$

$(b+2)(b-1)=0$ で $b=-2,\ 1$

以上から，$(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$ であり，求める $f(x)$ は

$$f(x)=-x^2+1,\ \ x^2-2x+1,\ \ x^2+x+1 \cdots 答$$

【戦略 2】

$f(x)=ax^2+bx+1$ と設定したあと

$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$ を ax^2+bx+1 で割り算した余りが 0

と翻訳してしまう方針もストレートです。

割り算の筆算に集中力が必要ですが，発想面での負担はほぼありません。

【解 2】

$f(0)=1$ を満たす 2 次式 $f(x)$ は

$$f(x)=ax^2+bx+1 \ (a\neq 0)$$

とおける。

$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$ を $f(x)$ で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-\frac{b}{a}x+\frac{1}{a^2}(b^2+ab-a) \\ \hline
ax^2+bx+1 & ax^4 \qquad +bx^2 \qquad\qquad +1 \\
 & ax^4+bx^3+x^2 \\ \hline
 & -bx^3+(b-1)x^2 \qquad\qquad +1 \\
 & -bx^3-\frac{b^2}{a}x^2 \qquad -\frac{b}{a}x \\ \hline
 & \frac{1}{a}(b^2+ab-a)x^2+\frac{b}{a}x+1 \\
 & \frac{1}{a}(b^2+ab-a)x^2+\frac{b}{a^2}(b^2+ab-a)x+\frac{1}{a^2}(b^2+ab-a) \\ \hline
 & \frac{b}{a^2}(-b^2-ab+2a)x+\frac{1}{a^2}(-b^2-ab+a^2+a)
\end{array}$$

余りが 0 と恒等式であるため，$\begin{cases} \dfrac{b}{a^2}(-b^2-ab+2a)=0 \\ \dfrac{1}{a^2}(-b^2-ab+a^2+a)=0 \end{cases}$

すなわち $\begin{cases} b(-b^2-ab+2a)=0 & \cdots ① \\ -b^2-ab+a^2+a=0 & \cdots ② \end{cases}$

① より，$b=0$ または $-b^2-ab+2a=0$

(i) $b=0$ のとき

② より，$a^2+a=0$

$a\neq 0$ より，$a=-1$

(ii) $-b^2-ab+2a=0$ のとき

$-b^2-ab+a=-a$ を ② に代入し，$a^2-a=0$

$a\neq 0$ より $a=1$

このとき，$-b^2-b+2=0$，すなわち $(b+2)(b-1)=0$

ゆえに，$b=-2,\ 1$

以上から，$(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$ であり，求める $f(x)$ は

$$f(x)=-x^2+1,\ \ x^2-2x+1,\ \ x^2+x+1 \cdots 答$$

【総括】

与えられたシチュエーションを素直に翻訳すればよいだけで，難関大受験生レベルでの母集団であった場合，実質は計算力勝負ということになるでしょう。