(1)　$S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+n}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

(2)　$T_n=\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\,(\log 2-S_n)=\frac{1}{4}$ を示せ。

＜ '06 芝浦工業大 ＞

【戦略】

(1) は， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\left(=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right)$**，(2) は** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}\left(=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right)$

と $\sum$ **の形で表すことで区分求積法の運用が目に付きます。**

(3)　**この流れでは，題意の** $\log 2$ **は** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ **のことだと分かります。**

そもそも区分求積という「面積という名の収束値」に注目して導出した $\log 2$ **という値ですから，**

その誤差も目に見える形で視覚化したい

と考えるのが自然です。

そこで，(1) の導出過程をもとに， $\displaystyle\log 2=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ **と見て**

$$\log 2-S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

と見ます。

ここから， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ **という** n **個の和として表現するため積分区間** $[0,\ 1]$ **を** n **等分して考えることにより**

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right\}$$

と見てやります。この $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ **という誤差が**

$\sum$ **され（積み重なり），** $\log 2-S_n$ **というトータルの誤差が得られる**

ということです。

あとは， $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ **というものを視覚化するために**

$y=\dfrac{1}{1+x}$ **のグラフを考えればよいでしょう。**

【解答】

(1)　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$\displaystyle\quad=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$
$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$
$$=\log 2\ \cdots\text{答}$$

(2)　$\displaystyle T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$

$\displaystyle\quad=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(n+k)^2}{n^2}}$

$\displaystyle\quad=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$

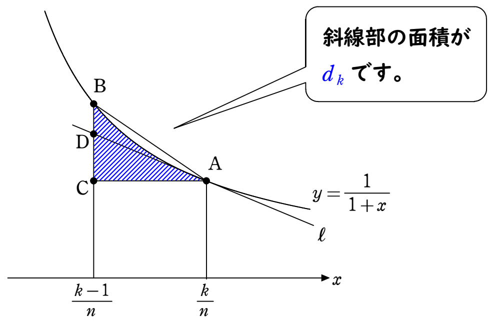
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$
$$=\Big[-(1+x)^{-1}\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\ \cdots\text{答}$$

(3)　$\displaystyle\log 2-S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right\}$$

$\displaystyle d_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおく。

$y=\dfrac{1}{1+x}$（$=f(x)$ とする）のグラフについて以下の（図 1）のように A，B，C，D を定める。



(図 1)

(図 1) の点 A における接線 ℓ の方程式は $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ より

$$y=-\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$x=\dfrac{k-1}{n}$ とすると，$y=-\dfrac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

ゆえに，$\mathrm{D}\left(\dfrac{k-1}{n}\,,\ \dfrac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$

ここで

$$\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)-\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$\triangle\mathrm{ADC}<d_k<\triangle\mathrm{ABC}$ であるため，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}<\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$k=1，2，\cdots，n$ を代入して辺々加えると

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}<\log 2-S_n<\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}<n(\log 2-S_n)<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$(\text{最左辺})=\dfrac{1}{2}T_n\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{1}{4}$ （ ∵ (2) より ）

$$(\text{最右辺})=\frac{1}{2}\left\{\left(f\left(\frac{0}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right)+\cdots\cdots+\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f(0)-f(1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+0}-\frac{1}{1+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(\log 2-S_n)=\frac{1}{4}$ となる。

【総括】

(1)，(2) までは手がとまることがあってはならないでしょう。

(1) の極限値 $\log 2$ が

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ という面積という意味付けをもった値

ということに目を付けて

「視覚化」によって誤差を評価し，はさみうちで仕留める

という方向性で考えることは自然なことであると同時に難しい部分でもあるでしょう。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【補足】

今回の $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ は

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

となります。

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left\{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right\}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right\}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots$ という無限級数が $\log 2$ の値に収束するということはよく知られており，メルカトル級数と呼ばれています。