実数 x_1, x_2, x_3, ……, x_n （$n\geqq 3$）が条件

$$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0 \quad (2\leqq k\leqq n-1)$$

を満たすとし，x_1, x_2, ……, x_n の最小値を m とする。

このとき $x_\ell=m$ となる ℓ（$1\leqq \ell\leqq n$）の個数は 1 または 2 であることを示せ。

＜ '00 京都大 ＞

【戦略】

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ **を，**$(x_{k+1}-x_k)-(x_k-x_{k-1})>0$ **と見ることができるかにかかってきますが，経験がものをいうでしょう。**

数列 $\{x_n\}$ **の増減は「階差の符号」を調べれば分かります。**

$x_{k+1}-x_k>0$ **ならば** $x_k<x_{k+1}$（**増加**）
$x_{k+1}-x_k<0$ **ならば** $x_k>x_{k+1}$（**減少**）

といった具合です。

【解答】

与えられた条件は，$(x_{k+1}-x_k)-(x_k-x_{k-1})>0$

すなわち，$x_k-x_{k-1}<x_{k+1}-x_k$（$k=2$, 3, ……, $n-1$）

$x_{k+1}-x_k=y_k$ とおくと，$y_{k-1}<y_k$（$k=2$, 3, ……, $n-1$）

つまり，$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-1}$

さて，$\begin{cases} y_k>0 \iff x_k<x_{k+1} & \cdots ① \\ y_k<0 \iff x_k<x_{k+1} & \cdots ② \\ y_k=0 \iff x_k=x_{k+1} & \cdots ③ \end{cases}$ に注意して場合分けをする。

(i) $y_1\geqq 0$ のとき

$$0\leqq y_1<y_2<y_3<\cdots\cdots<y_{n-1}$$

①，③ より，$x_1\leqq x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n$

$x_1\neq x_2$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 1 個
$x_1=x_2$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 2 個

(ii) $y_{n-1}\leqq 0$ のとき

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-1}\leqq 0$$

②，③ より，$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{n-1}\geqq x_n$

$x_{n-1}\neq x_n$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 1 個
$x_{n-1}=x_n$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 2 個

(iii) (i)，(ii) 以外のとき

$y_1<0$，$y_{n-1}>0$ より

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{i-1}\leqq 0<y_i<\cdots\cdots<y_{n-1}$$

となる i が存在する。

①，②，③ より

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{i-1}\geqq x_i<x_{i+1}<\cdots\cdots<x_n$$

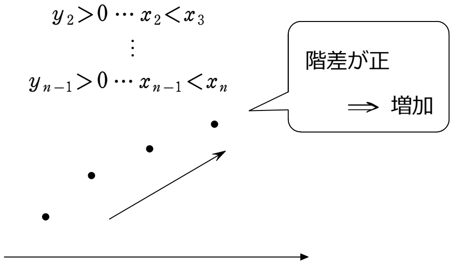
$x_{i-1}\neq x_i$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 1 個
$x_{i-1}=x_i$ ならば，$x_\ell=m$ となる ℓ は 2 個

以上 (i)，(ii)，(iii) より題意は示された。

【総括】

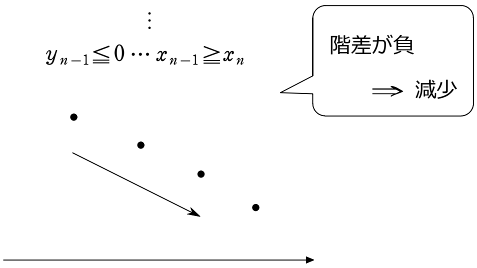
(i) は

$$y_1 \geqq 0 \cdots x_1 \leqq x_2$$
$$y_2 > 0 \cdots x_2 < x_3$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} > 0 \cdots x_{n-1} < x_n$$



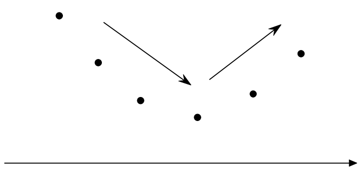
(ii) は

$$y_1 < 0 \cdots x_1 > x_2$$
$$y_2 < 0 \cdots x_2 > x_3$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} \leqq 0 \cdots x_{n-1} \geqq x_n$$



(iii) は

$$y_1 < 0 \cdots x_1 > x_2$$
$$y_2 < 0 \cdots x_2 > x_3$$
$$\vdots$$
$$y_{i-1} \leqq 0 \cdots x_{i-1} \geqq x_i$$
$$y_i > 0 \cdots x_i < x_{i+1}$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} > 0 \cdots x_{n-1} < x_n$$



というイメージです。

今回の条件

$$(x_{k+1} - x_k) - (x_k - x_{k-1}) > 0$$

は「階差数列の階差数列が正」ということです。

関数の増減を f' の符号で判断するように，数列の増減は階差の符号で判断できます。

つまり，今回は $f''>0$ が与えられているということに相当します。

$$f''(x) > 0 \ \cdots \ f(x) \text{ は下に凸}$$
$$f''(x) < 0 \ \cdots \ f(x) \text{ は上に凸}$$

ですので，その意味で

$$x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} \text{ の符号が一定}$$

であるような数列を「凸数列」と呼ぶことがあります。