(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x \fallingdotseq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

＜ '09 東京大 ＞

【戦略 1】

(1)　**両辺正なので log をとって考えればよいでしょう。**

$$\frac{1}{x}\{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\}>0$$

を証明すればいいということが分かれば基本一本道です。

普通に $f(x)=\frac{1}{x}\{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\}$ **と設定してもいいですが，若干面倒ですので，**

$$\frac{1}{x} \text{ と } \{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\} \text{ が同符号である}$$

ことをいうことにします。

(2)　**当然 (1) の不等式を利用して x に特別な数値を代入することを考えますが，証明すべき結論に現れる数値 0.99，0.9999 は**

$$0.99=1-\frac{1}{100}\quad ,\quad 0.9999=1-\left(\frac{1}{100}\right)^2$$

であること，また (1) の不等式に現れる $1-x$，$1+x$ の積が

$$(1-x)(1+x)=1-x^2$$

であることに注目すれば何をすればよいのかが見えてくるでしょう。

【解 1】

(1)　$-1<x<0$，$0<x<1$ のとき，示すべき不等式の両辺はともに正であるので

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

すなわち

$$\frac{1}{x}\{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\}>0 \quad \cdots(*)$$

を示せばよい。

$f(x)=\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)$　$(-1<x<1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

これにより，$-1<x<1$ での $f'(x)$ の増減は次の表に従う。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

これより，$-1<x<1$ で $f'(x) \geqq 0$ であり，$f(x)$ の増減は次の表に従う。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ゆえに，$-1<x<0$ の範囲で $f(x)<0$，
$0<x<1$ の範囲で $f(x)>0$

さらに　$-1<x<0$ の範囲で $\frac{1}{x}<0$，
$0<x<1$ の範囲で $\frac{1}{x}>0$

ゆえに，$-1<x<1$，$x \fallingdotseq 0$ の範囲で $\frac{1}{x}$ と $f(x)$ は同符号である。

これにより，$(*)$ が示され，題意の不等式の成立が示された。

(2)　(1) より $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$　$\cdots$①

① の両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$（>0）をかけると

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

これに $x=0.01$ を代入すると，$0.99<0.9999^{100}$　$\cdots$②

一方 ① の両辺に $(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$（>0）をかけると

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

これに $x=-0.01$ を代入すると，$0.9999^{101}<0.99$　$\cdots$③

②，③ から，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ であることが示された。

【戦略 2】(1) について

$\frac{1}{x}\{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\}>0$ **を証明すればよいのですが，**

【戦略 1】の方針のように

「$\frac{1}{x}$ と $\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)$ が同符号であればよい」

と気がつかずに

$$f(x)=\frac{1}{x}\{\log(x+1)-(x-1)\log(1-x)\}$$

と設定して，$f(x)>0$ を目指す方針でも，計算に耐えきれば結論まで行き着くことは可能です。

試験場ではこちらの解法が思いつきやすいとは思いますが，少しでも計算にミスが出ると平常心を失いかねませんから，工夫できる部分は工夫しましょう。

この場合，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left\{\log(1-x^2)+\frac{x^2}{x+1}\right\}$ となりますが，符号が負と分かる $-\frac{1}{x^2}$ は外して考え，残りの $\log(1-x^2)+\frac{x^2}{x+1}$ に目を向けると，多少和らぐでしょう。

【解 2】(1) について

$-1<x<1$ かつ $x\neq 0$ のとき，示すべき不等式の両辺はともに正なので，両辺自然対数を取った

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

を示せばよい。

$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)$ （$-1<x<1$，$x\neq 0$）とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x^2}\log(1-x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{1-x}\right)\\&=-\frac{1}{x^2}\left\{\log(1-x^2)+\frac{x^2}{x+1}\right\}\end{aligned}$$

$g(x)=\log(1-x^2)+\frac{x^2}{x+1}$ $(-1<x<1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{-2x}{1-x^2}+\frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^2(x-1)}\leqq 0\quad(\because\ -1<x<1)\end{aligned}$$

ゆえに，$g(x)$ は $-1<x<1$ で単調減少し，$g(0)=0$ なので

$$\begin{cases}-1<x<0\ \text{のとき}\ g(x)>0\\ \ 0<x<1\ \text{のとき}\ g(x)<0\end{cases}$$

したがって，$-1<x<1$，$x\neq 0$ において，$f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号が異符号であることに注意すると

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+x)}{x}-\frac{\log(1-x)}{-x}-\log(1-x)\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{-\frac{1}{x}}-\log(1-x)\right\}\\&=\log e-\log e-\log 1\\&=0\end{aligned}$$

したがって，$-1<x<1$，$x\neq 0$ において，$f(x)>0$ となり，題意は示された。

【戦略 3】(1) について

対数をとるところまでは一緒なのですが，対数をとった

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

について，$\frac{1}{x}$ でくくれる部分に注目すると

$$\log(1-x)<\frac{1}{x}\{\log(1+x)+\log(1-x)\}$$

すなわち

$$\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1-x^2)$$

を示せばよいことになります。

ここで，$f(x)=\log(1-x)$ とおくと，この示すべき不等式は

$$f(x)<\frac{f(x^2)}{x}$$

ですから，引数を揃えるために両辺 x（$\neq 0$）で割ると

$$x>0 \text{ のとき } \frac{f(x)}{x}<\frac{f(x^2)}{x^2}$$

$$x<0 \text{ のとき } \frac{f(x)}{x}>\frac{f(x^2)}{x^2}$$

となり，これを証明すればよいことになります。

この $\frac{f(x)}{x}$ は勾配関数と呼ばれ，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,0)$，$(x,f(x))$ を結ぶ線分の傾きという意味のある形の関数です。

これを活かすと図形的処理で片付きます。

【解 3】

$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき 示すべき不等式の両辺はともに正であるので，両辺の対数をとった

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

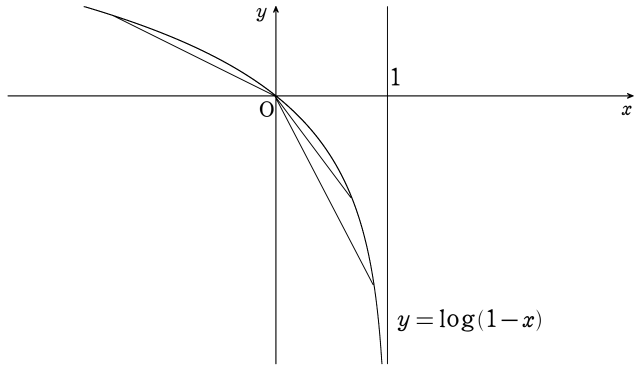
を証明すればよい。

$f(x)=\log(1-x)$ $(x<1)$ とし，$y=f(x)$ の表す曲線を C とすると C は上に凸の曲線である。

ゆえに，$x\neq 0$ のとき，C 上の 2 点 $(0,0)$ と $(x,f(x))$ を結ぶ線分の傾き $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$（$=g(x)$ とおく）について，

$g(x)$ は狭義単調減少

である。



$g(x)$ が狭義単調減少とは
$a<b$ ならば $g(a)>g(b)$
となることです。

$0<x<1$ のとき $0<x^2<x$ なので

$$\begin{aligned} g(x^2)>g(x) &\iff \frac{f(x^2)}{x^2}>\frac{f(x)}{x} \\ &\iff \frac{f(x^2)}{x}>f(x) \quad (\because x>0) \\ &\iff \frac{1}{x}\log(1-x^2)>\log(1-x) \\ &\iff \frac{1}{x}\{\log(1-x)+\log(1+x)\}>\log(1-x) \\ &\iff \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x) \end{aligned}$$

$-1<x<0$ のとき，$x<0<x^2$ であるので

$$\begin{aligned} g(x)>g(x^2) &\iff \frac{f(x)}{x}>\frac{f(x^2)}{x^2} \\ &\iff \frac{f(x^2)}{x}>f(x) \quad (\because x<0) \\ &\iff \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x) \end{aligned}$$

以上より，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

が成り立ち，題意は示された。

【戦略 4】(2) について

(1) で得られた不等式の利用法が分からないという場合は，形から二項定理を用いることが考えられます。

二項定理を用いて評価する方法としては「途中で打ち切る」という方針が有力です。

例えば今回は

$$0.9999^{100}=\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{100}=1-{}_{100}\mathrm{C}_1\frac{1}{10000}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{10000}\right)^{100}$$

ですが，二項展開した最初の第 1 項，第 2 項で 0.99 なので，第 3 項以降を打ち切ることにします。

なので，カットする第 3 項以降が正であることを示せばよいですね。

0.9999^{101} **についても同様ですが少し評価がシビアで，第 3 項まで残して第 4 項以降をカットすると**

$$0.9999^{101}<1-{}_{101}\mathrm{C}_1\frac{1}{10000}+{}_{101}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10000}\right)^2=0.9899505$$

とギリギリ 0.99 を下回ってくれました。

なのでケツカットするためにカットする部分が負であることを証明すればおしまいです。（方針自体は上の方針と同じなのでそちらは省略します。）

そこで，0.9999^{101} **については** $\dfrac{1}{0.9999^{101}}=\left(1+\dfrac{1}{9999}\right)^{101}$ **と考えて二項定理を用いる方針を示してみたいと思います。**

${}_{101}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{9999}\right)=\dfrac{101}{9999}=\dfrac{1}{99}$ **と約分できることに気がつけば，このように逆数を取る方針が見えてきます。**

【解 4】(2) について

$$0.9999^{100}$$
$$=\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{100}=1-{}_{100}\mathrm{C}_1\frac{1}{10000}+\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k}}{10000^{2k}}-\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}\right)+\left(\frac{1}{10000}\right)^{100}$$

ここで，$k=1，2，\cdots，49$ に対して

$$\frac{\dfrac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k}}{10000^{2k}}}{\dfrac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}}=\frac{(2k+1)\cdot 10000}{100-2k}\geqq\frac{3\cdot 10000}{100-2}>1$$ で，$\dfrac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}>0$ なので

$$\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k}}{10000^{2k}}>\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}，\text{すなわち}\ \frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k}}{10000^{2k}}-\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}>0$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k}}{10000^{2k}}-\frac{{}_{100}\mathrm{C}_{2k+1}}{10000^{2k+1}}\right)>0\ ，\text{及び}\ \left(\frac{1}{10000}\right)^{100}>0$$

を考えると

$\left(1-\dfrac{1}{10000}\right)^{100}>1-{}_{100}\mathrm{C}_1\dfrac{1}{10000}$，すなわち $0.9999^{100}>0.99$ が示された。

一方，

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.9999^{101}}&=\left(1+\frac{1}{9999}\right)^{101}\\&=1+{}_{101}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{9999}\right)+\sum_{k=2}^{191}{}_{101}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{9999}\right)^k\\&>1+{}_{101}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{9999}\right)\\&=1+\frac{101}{9999}\\&=1+\frac{101}{99\cdot 101}\\&=\frac{100}{99}\end{aligned}$$

ゆえに，$0.9999^{101}<\dfrac{99}{100}$，すなわち $0.9999^{101}<0.99$ が示された。

【総括】

(1) の不等式の証明から中々ハードです。

自然対数を取って差をとる部分までは進むでしょうが，何の工夫もなしに突き進むと計算の嵐に襲われます。

とは言え，「符号を司る部分だけ見る」という見方は，難関大志望者であれば勉強しているはずなので，【解 2】の解答はしたいところです。

(1) ができなかったとしたら (2) だけでも確保したいのですが，(2) の数値評価もシビアです。

(1) の不等式をどう活用するのかが見えにくいため，試験場であれば全体のセットを見て，取れる問題に移るのもやむなしでしょう。

思考力，計算力のいずれかが必要となる問題でした。