次の問に答えよ。

(1) 正の数 a，b に対して $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が成り立つことを示せ。

(2) 正の数 a，b に対して $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$ がつねに成り立つような k の最小値を求めよ。

< '00 鳴門教育大 >

【戦略 1】

(1) **示すべき不等式の両辺は正の値なので，$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ と 2 乗比較をすれば十分です。**

(2) **いわゆる絶対不等式というやつで，k を単独にすると分かりやすいでしょうか。**

今回のような k が存在するとしたら $k>0$ であることは間違いありません。 そもそも小さい方の $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が正の値なので。

だから，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\leqq k$ が常に成立するような k について考えるわけです。

そうなると左辺の最大値に注目したくなります。

一番強い奴が k に負けるのであれば，その他の連中も k に負けます。

左辺は 2 変数関数なので，1文字固定 (予選決勝法) でもいいですが同次式の性質を見落とさなければ

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}}\leqq k\text{，すなわち }\frac{1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{a}}}\leqq k$$

と変形し，$\dfrac{b}{a}=t$ などとおくことで，$\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\leqq k$ と 1 変数化できるでしょう。

【解 1】

(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2&=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)\\&=2\sqrt{ab}\\&>0\end{aligned}$$

より，$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ が示された。

この不等式の両辺は正の値なので $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ も成立する。

(2) 題意を満たすような k が存在するならば，$k>0$ であることが必要である。

したがって，題意の不等式は

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\leqq k\text{，すなわち }\frac{1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{a}}}\leqq k$$

$\dfrac{b}{a}=t\ (>0)$ とおくと，$\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\leqq k\ \cdots(*)$

$(*)$ が任意の正の実数 t に対して常に成立するような k の最小値を求めればよい。

$f(t)=\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\ (t>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{(1+\sqrt{t})'\sqrt{1+t}-(1+\sqrt{t})(\sqrt{1+t})'}{(\sqrt{1+t})^2}\\&=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{1+t}-(1+\sqrt{t})\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}\\&=\frac{1-\sqrt{t}}{2(1+t)\sqrt{t}\sqrt{1+t}}\end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(1)	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	(1)

よって，$f(t)$ の $t>0$ における最大値は $\sqrt{2}$

$(*)$ が常に成立するための必要十分条件は $k\geqq\sqrt{2}$

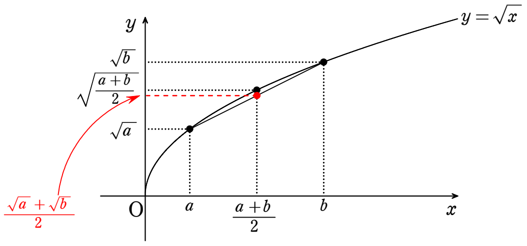
よって，求める k の最小値は $k=\sqrt{2}$ …答

【戦略 2】

$f(a+b)$ と $f(a)+f(b)$ というような形の 2 数を比較する際に，凸性に注目するということも有力な着眼点です。

今回は $f(x)=\sqrt{x}$ という関数について考えるわけで，これは上に凸です。

それを利用して



という状況がわかり， $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ **すなわち**

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2}\sqrt{a+b} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

が成立することが分かります。

ただ，ここから即座に k の最小値は $\sqrt{2}$ ということはできません。

あくまで，$k=\sqrt{2}$ のときに題意を満たすということが分かっただけで

k の値をもっと小さく攻めることはできないか

については別問題です。

ただ，$k<\sqrt{2}$ のときは先ほどの等号成立条件 $a=b$ を満たすとき

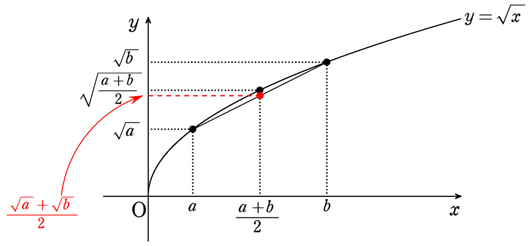
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

$k\sqrt{a+b}=k\sqrt{a+a}=k\sqrt{2a}=\sqrt{2}k\sqrt{a}<\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

であり，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>k\sqrt{a+b}$ となってしまい，題意を満たしません。

【解答 2】

$y=\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ のグラフは上に凸である。



ゆえに，任意の正の実数 a，b に対して $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

すなわち

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2}\sqrt{a+b} \quad (\text{等号成立は } a=b \text{ のとき})$$

が成立する。

ここで，$k<\sqrt{2}$ のときを考える。

このとき，$a=b$ なる a，b を考えると

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

$k\sqrt{a+b}=k\sqrt{a+a}=k\sqrt{2a}=\sqrt{2}k\sqrt{a}<\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

より，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>k\sqrt{a+b}$ となってしまい，題意を満たさない。

したがって，$k<\sqrt{2}$ のときは常に $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq k\sqrt{a+b}$ とはならない。

以上から，求める k の最小値は $\sqrt{2}$ …㊟

【戦略 3】

有名絶対不等式である

コーシー・シュワルツの不等式

を用いることもできます。

独立 2 変数の最大最小を考えるにあたり，有名絶対不等式の活用を狙っていくこと自体はよくありますので，それを意識していればもしかしたら舞い降りるかもしれません。

ただ，この口ぶりから分かるかもしれませんが，やはり何かのセオリーに基づく戦略というよりかは，経験や観察力に基づく閃き要素の強い方針であることは否めません。

【解 3】

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\geqq\sqrt{a}\cdot 1+\sqrt{b}\cdot 1$$

よって，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$ が成立する。

等号成立は $\sqrt{a}:\sqrt{b}=1:1$，すなわち $a=b$ のとき

ここで，$k<\sqrt{2}$ のときを考える。

このとき，$a=b$ なる a，b を考えると

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$$

$$k\sqrt{a+b}=k\sqrt{a+a}=k\sqrt{2a}=\sqrt{2}k\sqrt{a}<\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{a}=2\sqrt{a}$$

より，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>k\sqrt{a+b}$ となってしまい，題意を満たさない。

したがって，$k<\sqrt{2}$ のときは常に $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$ とはならない。

以上から，求める k の最小値は $\sqrt{2}$ …㊟

【戦略 4】方針のみ

少々大げさですが，式の形を図形底意味に捉えなおしてみます。

$\sqrt{a}=A$，$\sqrt{b}=B$ $(A>0．B>0)$ **と置きなおしてみると，与えられた不等式は**

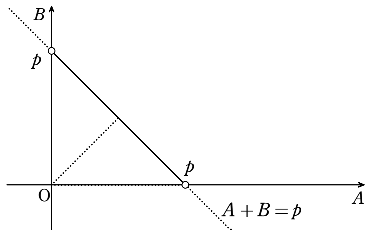
$A+B\leqq k\sqrt{A^2+B^2}$ **ということになります。**

$k>0$ **であることは間違いありませんから**

$A+B=p$ **と固定すると，** $p\leqq k\sqrt{A^2+B^2}$**，すなわち** $\dfrac{p}{k}\leqq\sqrt{A^2+B^2}$

です。

$A+B=p$ **を満たしつつ，** $\sqrt{A^2+B^2}$（$=(0,\ 0)$と(A,B)との距離）**を小さくしたいわけです。**



上の図の垂線の足の $(A,\ B)$ **が** $A+B=p$ **を満たしつつ，** $\sqrt{A^2+B^2}$ **を最小にするようなものです。**

その最小値は $\dfrac{p}{\sqrt{2}}$ **ですから，** $\dfrac{p}{\sqrt{2}}\geqq\dfrac{p}{k}$ **で，** $k>0$ **を考えると**

$k\geqq\sqrt{2}$ **を得ることになります。**

【戦略 5】

$\sqrt{a}=r\cos\theta$，$\sqrt{b}=r\sin\theta$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ という三角関数の置き換えによって

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$ という不等式は

$$r(\cos\theta+\sin\theta)\leqq kr$$

となり，$r>0$ より $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq k$ と書き変わります。

これが $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす任意の θ に対して成立するという絶対不等式の処理となり，左辺の最大値は即 $\sqrt{2}$ であることが分かり，$k\geqq\sqrt{2}$ が得られます。

これも【戦略 3】同様，セオリーに基づく戦略というよりは，経験，閃きの要素が強い戦略です。

【解 5】

$\sqrt{a}=r\cos\theta$，$\sqrt{b}=r\sin\theta$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=r(\cos\theta+\sin\theta)$

$k\sqrt{a+b}=k\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=kr$

なので，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$ という不等式は

$$r(\cos\theta+\sin\theta)\leqq kr$$

$r>0$ より

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq k\ \cdots(☆)$$

と変形でき，これが $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす任意の θ に対して成立するような k の最小値を求めればよい。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ の範囲で

$$1<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

等号成立は $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

ゆえに，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の最大値は $\sqrt{2}$ であり，(☆) が常に成立するための必要十分条件は $k\geqq\sqrt{2}$

以上から求める k の最小値は $k=\sqrt{2}$ …答

【総括】

工夫の余地が沢山あり，目移りしそうです。

この他にも【戦略 1】の同次式に注目する方針に準じる解答で

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$k>0$ であることが必要。

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$ の両辺を 2 乗して

$$a+2\sqrt{ab}+b\leqq k^2(a+b)$$

両辺 a（>0）で割って

$$1+\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\leqq k^2\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=t$ $(t>0)$ とおいて $1+t+t^2\leqq k^2(1+t^2)$

整理して，$(k^2-1)t^2-t+k^2-1\geqq 0$

これが任意の正の実数 t に対して成立するような k の最小値を求める

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

という方針も考えられます。

例えば同次式の処理などに気が付かなくても予選決勝法などで処理することができますし，逃げ道は色々残されています。(逃げ道というと言葉は悪いですが。)

いずれの方針においても，論述面で傷ができないようにしておきましょう。

例えば，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$ が得られたからと言って，
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqq k\sqrt{a+b}$
と安易に見比べて $k=\sqrt{2}$ としてしまうなど，傷になりやすい要素も含んでいます。

不備なく論じきるためには「確かな力」が必要です。