すべての正の実数 x, y に対し，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

＜ '95 東京大 ＞

【戦略】

【解 1】→ 同次式の処理
【解 2】→ 凸性の利用
【解 3】→ コーシーシュワルツの不等式の利用
【解 4】→ 三角関数による置き換え

という大枠の方針は例題と同じであるため，省略します。

【解 1】同次式の処理

題意を満たすような k が存在するならば，$k>0$ であることが必要である。

したがって，題意の不等式は

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k\text{，すなわち }\frac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1}{\sqrt{2\cdot\dfrac{x}{y}+1}}\leqq k$$

$\dfrac{x}{y}=t\ (>0)$ とおくと，$\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{2t+1}}\leqq k$ …$(*)$

$(*)$ が任意の正の実数 t に対して常に成立するような k の最小値を求めればよい。

$f(t)=\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{2t+1}}$ $(t>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{(\sqrt{t}+1)'\sqrt{2t+1}-(\sqrt{t}+1)(\sqrt{2t+1})'}{(\sqrt{2t+1})^2}\\&=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\sqrt{2t+1}-(\sqrt{t}+1)\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}}{2t+1}\\&=\frac{1-2\sqrt{t}}{2(2t+1)\sqrt{t}\sqrt{2t+1}}\end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(1)	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

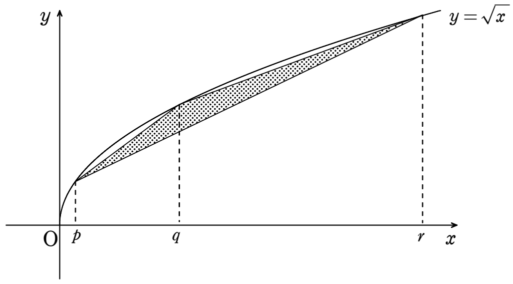
よって，$f(t)$ の $t>0$ における最大値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$(*)$ が常に成立するための必要十分条件は $k\geqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

よって，求める k の最小値は $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …答

【解 2】凸性の利用

$y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ のグラフは上に凸である。



ゆえに，$(p,\ \sqrt{p})$，$(q,\ \sqrt{q})$，$(r,\ \sqrt{r})$ で作られる三角形の重心に注目すれば

$$\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}}{3}\leqq\sqrt{\frac{p+q+r}{3}}$$

すなわち，$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\leqq\sqrt{3}\sqrt{p+q+r}$ が成立する。

これより，$\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{y}{4}}+\sqrt{\dfrac{y}{4}}\leqq\sqrt{3}\sqrt{x+\dfrac{y}{4}+\dfrac{y}{4}}$

すなわち $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{3}\sqrt{x+\dfrac{y}{2}}$ が成立する。

ゆえに，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1}{2}(2x+y)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$

ここで，$k<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときを考える。

このとき，$y=4x$ なる x, y を考えると

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{4x}=3\sqrt{x}$$

$$k\sqrt{2x+y}=k\sqrt{2x+4x}=k\sqrt{6x}=\sqrt{6}k\sqrt{x}<\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}=3\sqrt{x}$$

より，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>k\sqrt{2x+y}$ となってしまい，題意を満たさない。

ゆえに，$k<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，常に $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ とはならない。

以上から，求める k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …答

【解 3】コーシー・シュワルツの不等式の利用

コーシー・シュワルツの不等式から

$$\sqrt{(\sqrt{2x}\,)^2+(\sqrt{y}\,)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2}\geqq\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{y}\cdot 1$$

よって，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$ が成立する。

等号成立は $\sqrt{2x}:\sqrt{y}=1:\sqrt{2}$ ，すなわち $y=4x$ のとき

ここで，$k<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のときを考える。

このとき，$y=4x$ なる x，y を考えると

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{4x}=3\sqrt{x}$$

$$k\sqrt{2x+y}=k\sqrt{2x+4x}=k\sqrt{6x}=\sqrt{6}\,k\sqrt{x}<\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}=3\sqrt{x}$$

より，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>k\sqrt{2x+y}$ となってしまい，題意を満たさない。

ゆえに，$k<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，常に $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ とはならない。

以上から，求める k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …答

【解 4】三角関数への置き換え

ひとまず $x'=2x$ とおく。

$(x,\ y)$ が任意の正の実数を動くとき，$(x',\ y)$ も任意の正の実数を動き得る。

ゆえに，$\begin{cases}\sqrt{x'}=r\cos\theta\\ \sqrt{y}=r\sin\theta\end{cases}$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができる。

したがって，$\begin{cases}\sqrt{2x}=r\cos\theta\\ \sqrt{y}=r\sin\theta\end{cases}$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。

このとき

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\sin\theta\right)$$

$$k\sqrt{2x+y}=k\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=kr$$

なので，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ という不等式は

$$r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\sin\theta\right)\leqq kr$$

$r>0$ より

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin(\theta+\alpha)\leqq k$ …(☆)（ただし，α は $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{cases}$ を満たす鋭角）

と変形でき，これが $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす任意の θ に対して成立するような k の最小値を求めればよい。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\alpha<\theta+\alpha<\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ の範囲で $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ は実現可能

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(\theta+\alpha)\ \text{の最大値は}\ \frac{\sqrt{6}}{2}$$

であり，(☆) が常に成立するための必要十分条件は $k\geqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

以上から求める k の最小値は $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …答

【総括】

例題と違い，対称性が崩れています。

対称性が崩れた場合でも，難なくこなせる態度はやはり【解 1】でしょうか。

例題と並べてみると，守備範囲の広さと思いつきやすさのバランスで自分なりの優先順位が見えてくるでしょう。