不等式

$$|\sin x-\sin y|\leqq k\,|x-y|$$

がすべての角度 x ラジアン，y ラジアンについて成り立つような定数 k の最小値を求めよ。

＜ '04 信州大 ＞

【戦略】

「全称命題」

と捉えて，屁理屈を言います。

どんな x，y もってきても成り立つんだよな？

じゃあ，$x=\theta$，$y=0$ でも成り立つよね

というわけです。

これにより，$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right|\leqq k$ が任意の θ ($\fallingdotseq 0$) に対して成立する k を探すことになります。
（ $x=y$ と $x\fallingdotseq y$ の場合分けの必要性に気が付いてください。 ）

左辺の限界は 1 であることが想像つくと思いますが，【解 1】ではきちんと微分で調べていきます。

ただ，ここで $k=1$ が得られますが，これは $x=\theta$，$y=0$ のときに成立するような k であり，x，y が好き勝手動いたときにも成立する保証はありませんから，その裏付けもしておく必要があります。

【解答】

$$|\sin x-\sin y|\leqq k\,|x-y| \quad \cdots(*)$$

(i) $x-y=0$，すなわち $x=y$ のとき

($(*)$ の左辺) $=0$，($(*)$ の右辺) $=0$ で，$(*)$ は成立する。

(ii) $x-y\fallingdotseq 0$，すなわち $x\fallingdotseq y$ のとき

$x\fallingdotseq y$ を満たす任意の x，y について成立することから
特に，$x=\theta$，$y=0$ $(\theta\fallingdotseq 0)$ のときも成立する必要がある。

ゆえに，$|\sin\theta|\leqq k\,|\theta|$ すなわち

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|\leqq k$$

が任意の θ ($\fallingdotseq 0$)に対して成立する必要がある。$\cdots$(☆)

ここで，$f(X)=\dfrac{\sin X}{X}$ $(X>0)$ とする。

$$f'(X)=\frac{X\cos X-\sin X}{X^2}$$

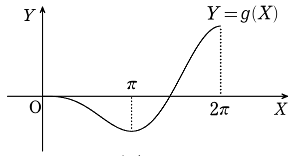
$g(X)=X\cos X-\sin X$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(X)&=1\cdot\cos X+X(-\sin X)-\cos X\\ &=-X\sin X\end{aligned}$$

ひとまず $0<X<2\pi$ の範囲で増減表を書くと

X	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$g'(X)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(X)$	0	↘	$-\pi$	↗	2π

ゆえに，$Y=g(X)$ のグラフは次の (図 1) のようになる。



(図 1)

$g(X)$ の符号が $f'(X)$ の符号であり，$0<X\leqq\pi$ の範囲では $f'(X)<0$ である。

$\displaystyle\lim_{X\to+0}f(X)=\lim_{X\to+0}\frac{\sin X}{X}=1$ であるため，

X	(0)	$\cdots$	π
$f'(X)$	0	$-$	$-$
$f(X)$	(1)	↘	0

これより，$0<X\leqq\pi$ の範囲で $|f(X)|<1$

一方，$x>\pi$ の範囲では $\left|\dfrac{\sin X}{X}\right|<\dfrac{1}{\pi}<1$

以上から，$X>0$ の範囲で $\left|\dfrac{\sin X}{X}\right|<1$ が成立する。

$f(X)$ は偶関数より，

$$X \fallingdotseq 0 \text{ に対して } \left|\frac{\sin X}{X}\right| < 1 \ \cdots (\bigstar)$$

が成立し，$Y = |f(X)|$ の値域は $Y < 1$

したがって $(☆)$ が言えるための k の条件は $k \geqq 1$ であり，
$(☆)$ が言えるときの k の最小値は $k = 1$

逆に $k = 1$ のとき，任意の x，y に対して

$$|\sin x - \sin y| \leqq |x - y|$$

が成立することを示す。

$x = y$ のときの成立は明らかなので，$x \fallingdotseq y$ のときを考える。

示すべき不等式の両辺を $|x - y|$（>0）で割ると

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leqq 1$$

$$\left|\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y}\right| \leqq 1$$

$\frac{x-y}{2} = \theta$ とおくと，$\left|\frac{2\cos(\theta+y)\sin\theta}{2\theta}\right| \leqq 1$

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| \cdot |\cos(\theta + y)| \leqq 1$$

と変形できるが，$(\bigstar)$ よりこれは成立する。

ゆえに，$k = 1$ のとき，任意の x，y に対して
$$|\sin x - \sin y| \leqq |x - y|$$
が成立する。

以上から，求める k の最小値は $k = 1$ …㊟

【総括】

全称命題と捉えて進める部分は，経験値が必要です。

なお，屁理屈を言った後の十分性の証明，すなわち

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leqq 1$$

の証明に平均値の定理をインスピレーションした人もいると思います。

> 平均値の定理から
> $$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos z$$
> となる α が x と y の間に存在するため
> $$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos\alpha| \leqq 1$$

ということが言えます。

注意点は，あくまで十分条件の証明という「部分的別解」としてしか使えないということです。

つまり，最初から

> 平均値の定理から
> $$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos z$$
> となる α が x と y の間に存在するため
> $$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos\alpha| \leqq 1$$
> よって，$k \geqq 1$ であればよく，k の最小値は 1

とやってしまうのは，ウルサイことを言えばまずいでしょう。

というのも，$|\cos\alpha| = 1$ となる x，y が存在しません。

つまり，$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leqq 1$ における等号成立がありえません。

そうなってくると，

「え？本当に $k = 1$ が最小値？」

「もっと k の値を攻めて小さくできない？」

ということになりかねないことになります。

【解答】では $\left|\dfrac{\sin X}{X}\right|<1$ …(★) であることに加え，「値域」についても触れました。
1 よりほんのわずかでも小さければ「取り得ますよ」というのが値域です。

(★) だけだと，

$|f(X)|<1$ なんだよね？
じゃあもしかしたら $|f(X)|\leqq\dfrac{1}{2}$ かもしれないよね？
$|f(X)|\leqq\dfrac{1}{3}$ かもしれないよね？

などと言われかねないので，「いやいや，んなことねぇよ」と言うためにわざわざ増減表を書いて値域について触れたわけです。

(試験場でそこまで気が回るかというと難しいと思いますし，時間との兼ね合いもあります。)

要するに，結構ウルサイ問題であり，採点基準によっては大なり小なり思わぬ減点があるかもしれないよということです。

【ウンチク】

本問で扱った，

$$|f(x)-f(y)|\leqq k|x-y|$$

が任意の x , y に対して成立するとき，関数 f は

リプシッツ連続である

と言い，k をリプシッツ定数と言います。

本問の $f(x)=\sin x$ はリプシッツ連続なのですが，リプシッツ定数は 1 以上です。

リプシッツ定数 k が $0\leqq k<1$ であるとき，f は縮小関数と呼ばれます。

このあたりの関連トピックスとして
縮小関数による漸化式の極限
という話題も入試では頻出です。