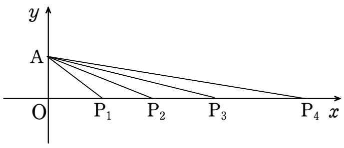
右図のような座標平面上の点
A$(0,1)$，O$(0,0)$，$\mathrm{P}_n(n,0)$
(n は自然数) に対して，$\theta_n=\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O}$
とおく。
以下の問いに答えなさい。



(1) $\tan(\theta_m+\theta_n)=1$，$m\leqq n$ となる自然数の組 (m,n) をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい。

(2) $\tan(\theta_\ell+\theta_m+\theta_n)=1$，$\ell\leqq m\leqq n$ となる自然数の組 $(\ell.m.n)$ をすべて求め，それ以外にない理由を述べなさい。

＜ ’06 首都大学東京 (東京都立大) ＞

【戦略】

(1) $\tan(\theta_m+\theta_n)=1$ **に対して加法定理を用いると**

$$\frac{\tan\theta_m+\tan\theta_n}{1-\tan\theta_m\tan\theta_n}=1$$

となります。

設定から，$\tan\theta_m=\dfrac{1}{m}$，$\tan\theta_n=\dfrac{1}{n}$ **であるため**

$$\frac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}}=1，すなわち \frac{m+n}{mn-1}=1$$ **を得ます。**

これを整理すれば，$mn-m-n-1=0$ **という定番の不定方程式です。**

(2) **例題が** $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ **と最初から和が** $\dfrac{\pi}{4}$ **と与えられているのに対し，今回は** $\tan(\theta_\ell+\theta_m+\theta_n)=1$ **という条件の与えられ方をしています。**

ラフに鋭角と見積もると，$0<\theta_\ell+\theta_m+\theta_n<\dfrac{3}{2}\pi$ **なので**

$\theta_\ell+\theta_m+\theta_n=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ **という可能性があります。**

ただ，これはラフに考えすぎで，一番大きな角度である θ_ℓ **でさえ** $\dfrac{\pi}{4}$ **以下です。**

したがって，$\theta_\ell+\theta_m+\theta_n=\dfrac{5}{4}\pi$ **となることはなく，結局は**

$$\theta_\ell+\theta_m+\theta_n=\frac{\pi}{4}$$

となります。

ここから先は例題同様のため割愛します。

【解答】

(1) $\tan\theta_m=\dfrac{1}{m}$，$\tan\theta_n=\dfrac{1}{n}$ であり，$\tan(\theta_m+\theta_n)=1$ より

$$\frac{\tan\theta_m+\tan\theta_n}{1-\tan\theta_m\tan\theta_n}=1$$

ゆえに，$\dfrac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}}=1$，すなわち $\dfrac{m+n}{mn-1}=1$

これより，$mn-m-n-1=0$ を得る。

これは，$(m-1)(n-1)=2$ と変形できる。

$1\leqq m\leqq n$，すなわち $0\leqq m-1\leqq n-1$ であることに注意すれば

$$\begin{cases} m-1=1 \\ n-1=2 \end{cases}$$

ゆえに，求める m，n の組は $(m,n)=(2,3)$ に限る。… 答

(2) $1\leqq \ell\leqq m\leqq n$ より，$0<\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{m}\leqq\dfrac{1}{\ell}\leqq 1$，すなわち

$$0<\tan\theta_n\leqq\tan\theta_m\leqq\tan\theta_\ell\leqq\tan\frac{\pi}{4}$$

θ_ℓ，θ_m，θ_n は鋭角の範囲内の角度であり，

$$0<\theta_n\leqq\theta_m\leqq\theta_\ell\leqq\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，$0<\theta_\ell+\theta_m+\theta_n\leqq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\left(=\dfrac{3}{4}\pi\right)$

この範囲内で $\tan(\theta_\ell+\theta_m+\theta_n)=1$ となる $\theta_\ell+\theta_m+\theta_n$ は

$$\theta_\ell+\theta_m+\theta_n=\frac{\pi}{4}$$

今，θ_ℓ，θ_m，θ_n は正の角度であることを考えると

$\theta_\ell<\theta_\ell+\theta_m+\theta_n\leqq\theta_\ell+\theta_\ell+\theta_\ell$，すなわち $\theta_\ell<\dfrac{\pi}{4}\leqq 3\theta_\ell$ となる。

これより，$\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta_\ell<\dfrac{\pi}{4}$ を得るため，$\tan\dfrac{\pi}{12}\leqq\tan\theta_\ell<\tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}=\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$$

ゆえに，$2-\sqrt{3}\leqq\dfrac{1}{\ell}<1$，すなわち $1<\ell\leqq 2+\sqrt{3}$

これを満たす整数 ℓ は $\ell=2$，3

$\theta_m+\theta_n=\dfrac{\pi}{4}-\theta_\ell$ より，$\tan(\theta_m+\theta_n)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta_\ell\right)$ であり

$$\frac{\tan\theta_m+\tan\theta_n}{1-\tan\theta_m\tan\theta_n}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta_\ell}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta_\ell}$$

(*) より，$\dfrac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}=\dfrac{1-\frac{1}{\ell}}{1+\frac{1}{\ell}}$

これを整理すると，$\dfrac{m+n}{mn-1}=\dfrac{\ell-1}{\ell+1}$ …(*)

(i)　$\ell=2$ のとき (*) は $\dfrac{m+n}{mn-1}=\dfrac{1}{3}$

　これを整理すると，$mn-3m-3n-1=0$

$$(m-3)(n-3)=10$$

　$(2=\ )\ell\leqq m\leqq n$ より，$-1\leqq m-3\leqq n-3$ に注意すると

$m-3$	1	2
$n-3$	10	5

　これより，$(m,\ n)=(4,\ 13),\ (5,\ 8)$

(ii)　$\ell=3$ のとき (*) は $\dfrac{m+n}{mn-1}=\dfrac{1}{2}$

　これを整理すると，$mn-2m-2n-1=0$

$$(m-2)(n-2)=5$$

　$(3=\ )\ell\leqq m\leqq n$ より，$1\leqq m-2\leqq n-2$ に注意すると

$$\begin{cases}m-2=1\\n-2=5\end{cases}$$

　これより，$(m,\ n)=(3,\ 7)$

以上 (i)，(ii) より，求める ℓ，m，n の値の組は

　$(\ell,\ m,\ n)=(2,\ 4,\ 13),\ (2,\ 5,\ 8),\ (3,\ 3,\ 7)$ に限る …答

【総括】

(1) で得た，$\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ という結果は，例題の最後で触れたオイラーの発見した関係式です。

(2) の結果の一部である $2\,\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$ という結果もハットンという数学者とオイラーが独立に発見しています。