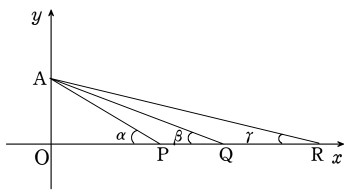
　Oを原点とする xy 平面の y 軸上に点 A$(0,1)$ をとり，x 軸上に x 座標が正整数であるような3点 P$(p,0)$，Q$(q,0)$，R$(r,0)$ をとる。
　ただし，$p \leqq q \leqq r$ で，P，Q，R のうち互いに重なるものがあってもよいものとする。いま，$\angle APO + \angle AQO + \angle ARO = \dfrac{\pi}{4}$ であるように P，Q，R をとりたい。そのとき，

(1)　p のとりうる値を求めよ。

(2)　p，q，r の値の組をすべて求めよ。

＜ '87 埼玉大 ＞

【戦略】



$\angle APO=\alpha$，$\angle AQO=\beta$，$\angle ARO=\gamma$ と設定します。

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ であり，これら α，β，γ は $\begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{p} \\ \tan\beta=\dfrac{1}{q} \\ \tan\gamma=\dfrac{1}{r} \end{cases}$ を満たしています。

(1)　**p のとり得る値が限られるということを匂わせる設問です。**

つまり，p の範囲を絞ることを考えます。

p がとれる範囲が限られるということは，それに関連する角度 α についても制限があることが考えられるでしょう。

$0<p\leqq q\leqq r$ という範囲を考えると，$0<\dfrac{1}{r}\leqq\dfrac{1}{q}\leqq\dfrac{1}{p}$ ですから

$0<\tan\gamma\leqq\tan\beta\leqq\tan\alpha$ であり，これらは鈍角ですから，tan の大小と角度の大小はリンクします。

つまり，$0<\gamma\leqq\beta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ということが言えます。

α の範囲を絞りたいと思っていたので，

$$\alpha<\alpha+\beta+\gamma\leqq\alpha+\alpha+\alpha$$

と絞ってやると，$\alpha<\dfrac{\pi}{4}\leqq 3\alpha$，すなわち $\dfrac{\pi}{12}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を得ます。

(2)　**$\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ と見て，両辺に tan の服を着せれば**

$$\tan(\beta+\gamma)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

となり，$\dfrac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$ です。

これより，$\dfrac{q+r}{qr-1}=\dfrac{p-1}{p+1}$ を得るため，(1) で得た p の値のときを個別に調べればよく，この先は典型的な整数についての不定方程式の処理となります。

【解答】

(1)　$\angle APO=\alpha$，$\angle AQO=\beta$，$\angle ARO=\gamma$ とおく。

このとき，$\begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{p} \\ \tan\beta=\dfrac{1}{q} \\ \tan\gamma=\dfrac{1}{r} \end{cases}$ $\cdots(*)$ を満たす。

$0<p\leqq q\leqq r$ より，$0<\dfrac{1}{r}\leqq\dfrac{1}{q}\leqq\dfrac{1}{p}$

$(*)$ より $0<\tan\gamma\leqq\tan\beta\leqq\tan\alpha$

α，β，γ は鋭角の範囲内の角度であり，$0<\gamma\leqq\beta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

また，$\alpha<\alpha+\beta+\gamma\leqq\alpha+\alpha+\alpha$

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ という条件より，$\alpha<\dfrac{\pi}{4}\leqq 3\alpha$

すなわち $\dfrac{\pi}{12}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ で，$\tan\dfrac{\pi}{12}\leqq\tan\alpha<\tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$$

$(*)$ も加味すれば，$2-\sqrt{3}\leqq\dfrac{1}{p}<1$，すなわち $1<p\leqq 2+\sqrt{3}$

であり，これを満たす整数 p は $p=2, 3$ …答

(2)　$\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ より，$\tan(\beta+\gamma)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ であり

$$\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$(*)$ より，$\dfrac{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{r}}=\dfrac{1-\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}}$

これを整理すると，$\dfrac{q+r}{qr-1}=\dfrac{p-1}{p+1}$ $\cdots(**)$

(i)　$p=2$ のとき $(**)$ は $\dfrac{q+r}{qr-1}=\dfrac{1}{3}$

これを整理すると，$qr-3q-3r-1=0$

$$(q-3)(r-3)=10$$

$(2=\ )p\leqq q\leqq r$ より，$-1\leqq q-3\leqq r-3$ に注意すると

$q-3$	1	2
$r-3$	10	5

これより，$(q, r)=(4, 13), (5, 8)$

(ii)　$p=3$ のとき (**) は $\dfrac{q+r}{qr-1}=\dfrac{1}{2}$

これを整理すると，$qr-2q-2r-1=0$

$$(q-2)(r-2)=5$$

$(3=)\ p\leqq q\leqq r$ より，$1\leqq q-2\leqq r-2$ に注意すると

$$\begin{cases} q-2=1 \\ r-2=5 \end{cases}$$

これより，$(q,\ r)=(3,\ 7)$

以上 (i)，(ii) より，求める p，q，r の値の組は

$$(p,\ q,\ r)=(2,\ 4,\ 13),\ (2,\ 5,\ 8),\ (3,\ 3,\ 7)\ \cdots 答$$

【総括】

座標と tan という薄皮一枚被った整数問題ですが，この薄皮を薄皮と感じられるかどうかが力の差です。

感覚的に，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であることはある意味自明です。

また，$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ で，α が一番大きな角であることを考えると

$\alpha\geqq\dfrac{\pi}{12}$ というのも感覚的には当然です。

そうなってくると，p にも制限がついてくることは決して無理のない発想ですから，ノーヒントであっても対応したいところです。

なお，今回得られた p，q，r の値について

$$\begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{2} \\ \tan\beta=\dfrac{1}{4} \\ \tan\gamma=\dfrac{1}{13} \end{cases},\quad \begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{2} \\ \tan\beta=\dfrac{1}{5} \\ \tan\gamma=\dfrac{1}{8} \end{cases},\quad \begin{cases} \tan\alpha=\dfrac{1}{3} \\ \tan\beta=\dfrac{1}{3} \\ \tan\gamma=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

が言えるため，$y=\tan x$ の逆関数 $\mathrm{Arctan}\,x$ を用いて

$$\begin{cases} \alpha=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{2} \\ \beta=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{4} \\ \gamma=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{13} \end{cases},\quad \begin{cases} \alpha=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{2} \\ \beta=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5} \\ \gamma=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{8} \end{cases},\quad \begin{cases} \alpha=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{3} \\ \beta=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{3} \\ \gamma=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

と表せます。

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ ですので，

$$\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{4}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つわけです。

このことに関連する話題として，

$$4\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

という等式があり，「マチンの公式」と呼ばれます。

【マチンの公式の証明】

$\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ となる θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。

このとき，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12}$$

$$\tan 4\theta=\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$$

これより，$4\theta-\dfrac{\pi}{4}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{239}$

一方，$\theta=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5}$ より，$4\,\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5}-\dfrac{\pi}{4}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{239}$

すなわち，$4\,\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ を得る。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

本問で得た結果のように，マチンの公式にはそれに準ずるような類似形が多々見つかっており，

例えば，オイラーが発見した

$$\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

なども有名です。