

ベータ関数【類題】

次の等式を証明せよ。ただし、 $n, m$  は自然数、 $\alpha, \beta$  は実数とする。

- (1)  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$   
 (2)  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta) dx = -\frac{n!}{(n+2)!}(\beta-\alpha)^{n+2}$   
 (3)  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx = (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m+1)!}(\beta-\alpha)^{n+m+1}$   
 < '07 大阪教育大 >

【戦略】

- (1) 通称  $\frac{1}{6}$  公式と呼ばれるものの証明です。

様々な解法がありますが、ここでは(3)のオチを意識して部分積分で仕留める方針をとります。

- (2) こちらも部分積分です。( ) の服の着せ替えにより  $(x-\beta)$  を消すことを考えます。

- (3) 一般化を考えますが、ここまでの流れで、部分積分を繰り返せばいずれどちらかの次数は下がっていき、なくなります。

部分積分という同じアルゴリズムを施し続けるわけなので、それを数式的に表現する漸化式(積分漸化式)でまとめていきます。

【解答】

(1) 
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 \right\}' (x-\beta) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} \right\}' (x-\beta) dx \\ &= \left[ \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}(x-\beta) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} \left[ \frac{1}{n+2}(x-\alpha)^{n+2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\beta-\alpha)^{n+2} \\ &= -\frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+2)(n+1)n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}(\beta-\alpha)^{n+2} \\ &= -\frac{n!}{(n+2)!}(\beta-\alpha)^{n+2} \end{aligned}$$

- (3)  $B(n, m) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx$  ( $n, m$  は非負整数) とおく。

$$\begin{aligned} B(n, m) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} \right\}' (x-\beta)^m dx \\ &= \left[ \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}(x-\beta)^m \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1} \cdot m(x-\beta)^{m-1} dx \\ &= -\frac{m}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+1}(x-\beta)^{m-1} dx \\ &= -\frac{m}{n+1} B(n+1, m-1) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} B(n, m) &= -\frac{m}{n+1} B(n+1, m-1) \\ &= \left( -\frac{m}{n+1} \right) \left( -\frac{m-1}{n+2} \right) B(n+2, m-2) \\ &= \left( -\frac{m}{n+1} \right) \left( -\frac{m-1}{n+2} \right) \left( -\frac{m-2}{n+3} \right) B(n+3, m-2) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ 個}} \\ &= \left( -\frac{m}{n+1} \right) \left( -\frac{m-1}{n+2} \right) \left( -\frac{m-2}{n+3} \right) \cdots \left( -\frac{1}{n+m} \right) B(n+m, 0) \\ &= (-1)^m \cdot \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+m} dx \\ &= (-1)^m \cdot \frac{n!m!}{(n+m)!} \left[ \frac{1}{n+m+1}(x-\alpha)^{n+m+1} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= (-1)^m \cdot \frac{n!m!}{(n+m)!} \cdot \frac{1}{n+m+1} (\beta-\alpha)^{n+m+1} \\ &= (-1)^m \cdot \frac{n!m!}{(n+m+1)!} (\beta-\alpha)^{n+m+1} \end{aligned}$$

【戦略2】(1), (2)について

少々テクニカルですが,  $x-\beta=(x-\alpha)-(\beta-\alpha)$  と見る有名な方法があります。

初見では中々難しい見方です。

【解2】(1), (2)について

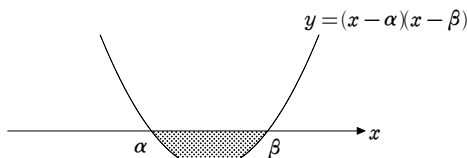
$$\begin{aligned}
 (1) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha) \{ (x-\alpha) - (\beta-\alpha) \} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha) dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 dx - (\beta-\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{3} (x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta-\alpha) \left[ \frac{1}{2} (x-\alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3} (\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2} (\beta-\alpha)^3 \\
 &= -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \\
 \\
 (2) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n \{ (x-\alpha) - (\beta-\alpha) \} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+1} - (\beta-\alpha)(x-\alpha)^n dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+1} dx - (\beta-\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n dx \\
 &= \left[ \frac{1}{n+2} (x-\alpha)^{n+2} \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta-\alpha) \left[ \frac{1}{n+1} (x-\alpha)^{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{n+2} (\beta-\alpha)^{n+2} - \frac{1}{n+1} (\beta-\alpha)^{n+2} \\
 &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} (\beta-\alpha)^{n+2} \\
 &= -\frac{n!}{(n+2)!} (\beta-\alpha)^{n+2}
 \end{aligned}$$

【戦略3】(1)について

定積分は(符号付き)面積という意味があります。

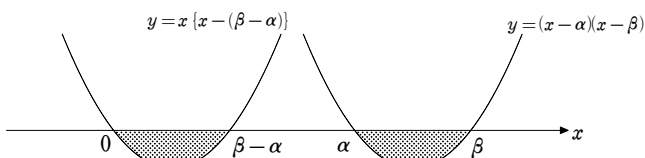
ひとまず  $\alpha < \beta$  で考えます。

$$-\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$



この打点部の面積を表します。

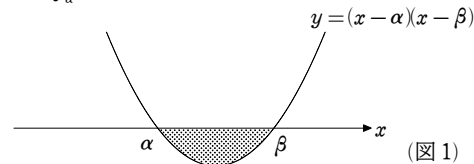
これを  $x$  軸方向に  $\alpha$  だけ平行移動すると



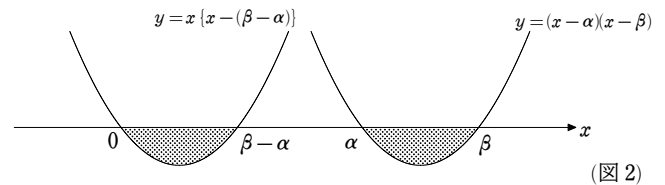
となり, 面積自体は変わりません。

【解3】(1)について

$\alpha < \beta$  のとき,  $-\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$  は(図1)の打点部の面積を表す。



この放物線を  $x$  軸方向に  $-\alpha$  だけ平行移動させても打点部の面積は変わらない。(図2参照)



$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに, } -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= -\int_0^{\beta-\alpha} x \{ x - (\beta-\alpha) \} dx \\
 &= -\int_0^{\beta-\alpha} x^2 - (\beta-\alpha)x dx \\
 &= -\left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{(\beta-\alpha)}{2} x^2 \right]_0^{\beta-\alpha} \\
 &= -\left[ -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \right] \\
 &= \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3
 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3$$

$$\alpha > \beta \text{ のとき, } \int_{\beta}^{\alpha} (x-\beta)(x-\alpha) dx = -\frac{1}{6} (\alpha-\beta)^3 \text{ が成り立つので}$$

ココとココのひっくり返してチャラ

$$\text{結局は } \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \text{ が成り立つ。}$$

【総括】

結局(3)の一般化(第一種オイラー積分)まで考えると, 部分積分という路線が一貫性のある態度でしょう。

記述式の試験で,  $\frac{1}{6}$  公式や  $\frac{1}{12}$  公式は無断で使用すると減点されるとか色々噂が飛び交っています。

グダグダ言われるのもイヤだから簡単に証明をつけておきたいというぐらいのものであれば, 【解2】の式変形を知っていれば一番手っ取り早いです。