負でない整数 m，n に対して，$B(m\,,\,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ と定義する。

(1) $B(3\,,\,2)$ を求めよ。
(2) $B(m\,,\,n)$ を $B(m+1\,,\,n-1)$ を使って表せ。ただし，$n\geqq 1$ とする。
(3) $B(m\,,\,n)$ を求めよ。
(4) a，b を異なる実数とする。このとき，

$$\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx$$

を求めよ。

＜ '15 横浜市立大 ＞

【戦略】

(1) **直接計算してもたかが知れていますが，ここでは (4) のオチを見越し，部分積分によって $(1-x)^{\square}$ というパーツを消しに行く路線で 計算していくことにします。**

(2) **積分漸化式の作成は部分積分という定石に従います。**

どちらに $(\quad)'$ の服を着せるかですが，部分積分によって $(\quad)'$ の着せ替えが起こって次数が下がるわけです。

今回求められているのは，「n の方の次数を下げよ」ということです。

そこで，$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1\left(\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^n\,dx$ と見て部分積分をかませばよいでしょう。

(3) **(2) の漸化式を用いていくと，やがて $B(☆\,,\,0)$ と右側が 0 となる瞬間がやってきます。**
規則性を読み取って，ミスなく書き下しましょう。

(4) **今回の $B(m\,,\,n)$ を登場させたいので，そこに帰着するような置換積分を考えていきます。**

ひとまず，$x-a$ を一つの塊と見て，$t=x-a$ と置換します。

すると，$dt=dx$，

x	$a\to b$
t	$0\to b-a$

であり，

$$\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx=\int_0^{b-a} t^m\{\,t-(b-a)\,\}^n\,dt$$

次に積分区間を 0 から 1 までとするために

$t=(b-a)s$ **と置換すると，** $dt=(b-a)\,ds$，

t	$0\to b-a$
s	$0\to 1$

$$\begin{aligned}\int_0^{b-a} t^m\{\,t-(b-a)\,\}^n\,dt&=\int_0^1(b-a)^m s^m\{\,(b-a)s-(b-a)\,\}^n(b-a)\,ds\\&=\int_0^1(b-a)^m s^m\{(b-a)(s-1)\}^n(b-a)\,ds\\&=\int_0^1(b-a)^m s^m(b-a)^n(s-1)^n(b-a)\,ds\\&=(b-a)^{m+n+1}(-1)^n\int_0^1 s^m(1-s)^n\,ds\\&=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}B(m\,,\,n)\end{aligned}$$

【解答】ではこの 2 段階の置換を一気にまとめて

$$x=t+a=(b-a)s+a$$

という置換でやってしまいます。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}B(3\,,\,2)&=\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4\right)'(1-x)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4(1-x)^2\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{4}x^4\cdot 2(1-x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{5}x^5\right)'(1-x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{5}x^5(1-x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{5}x^5\,dx\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1\right\}\\&=\frac{1}{60}\ \cdots 答\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}B(m\,,\,n)&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^n\,dx\\&=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\frac{n}{m+1}B(m+1\,,\,n-1)\ \cdots 答\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}B(m\,,\,n)&=\frac{n}{m+1}B(m+1\,,\,n-1)\\&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}B(m+2\,,\,n-2)\\&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}B(m+3\,,\,n-3)\\&\ \ \vdots\\&\ \ \vdots\\&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{m+n}B(m+n\,,\,0)\\&=\frac{m\,!\,n\,!}{(m+n)!}\int_0^1 x^{m+n}(1-x)^0\,dx\\&=\frac{m\,!n\,!}{(m+n)!}\left[\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1\\&=\frac{m\,!n\,!}{(m+n)!}\cdot\frac{1}{m+n+1}\\&=\frac{m\,!n\,!}{(m+n+1)!}\ （これは n=0 のときも成立する）\end{aligned}$$

ゆえに，$B(m\,,\,n)=\dfrac{m\,!n\,!}{(m+n+1)!}$ $\cdots$ 答

(4) $I=\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx$ とおく。

$x=(b-a)s+a$ とおくと，$dx=(b-a)\,ds$，

x	$a\to b$
s	$0\to 1$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\{\,(b-a)s\,\}^m\{\,(b-a)s+a-b\,\}^n(b-a)\,ds\\&=\int_0^1(b-a)^m\cdot s^m\cdot\{\,(b-a)(s-1)\,\}^n(b-a)\,ds\\&=\int_0^1(b-a)^m\cdot s^m\cdot(b-a)^n\cdot(-1)^n(1-s)^n(b-a)\,ds\\&=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}\int_0^1 s^m(1-s)^n\,ds\\&=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}B(m\,,\,n)\\&=(-1)^n(b-a)^{m+n+1}\frac{m\,!n\,!}{(m+n+1)!}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

(1) は (3) の結果に $m=3$，$n=2$ をぶち込んでもいいでしょう。
((1) の結果が (3) の導出に効いてくれば順番通りやらざるをえませんが，今回の問題はとてもそうとは思えません。)

なお，最後のオチの

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n(\beta-\alpha)^{m+n+1}\frac{m\,!n\,!}{(m+n+1)!}$$

における

$m=1$，$n=1$ のとき

$$\int_a^b(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1!1!}{(1+1+1)!}(\beta-\alpha)^{1+1+1}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$m=1$，$n=2$ のとき

$$\int_a^b(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1!2!}{(1+2+1)!}(\beta-\alpha)^{1+2+1}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

などは，それぞれ

・放物線と直線で囲まれる部分の面積
・３次曲線と接線で囲まれる部分の面積

を求める際によく使う，通称 $\frac{1}{6}$公式，$\frac{1}{12}$ 公式 として有名です。

本問はこれらの一般論の導出を行っていたことになります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ は第一種オイラー積分と呼ばれます。

今回，$\alpha=0$，$\beta=1$ として得られる $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ というものを $B(m,n)$ と呼んでいたわけです。

今回は，整数 m，n という設定でしたが

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

という形で定義されるものをベータ関数と言います。
(これは $\mathrm{Re}(p)>0$，$\mathrm{Re}(q)>0$ なる複素数 p，q に対して定義されますが，
そうなると高校範囲を逸脱します。)