四角形 ABCD において，

AB$=a$，BC$=b$，CD$=c$，DA$=d$，AC$=x$，BD$=y$

とする。

(1) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を a，b，c，d，x，y を用いて表せ。

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，$xy=ac+bd$ が成り立つことを示せ。

＜ '11 熊本大 ＞

【戦略】

(1) **余弦定理を 2 発かませば即終了です。**

(2) **四角形 ABCD が円に内接することの翻訳としては**

$$\begin{cases} \angle A+\angle C=\pi \\ \angle B+\angle D=\pi \end{cases}$$

と翻訳するのが有力な手段でしょう。

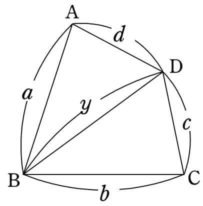
(1) を誘導と見れば， $\begin{cases} \cos A=-\cos C \\ \cos B=-\cos D \end{cases}$ **として (1) の結果を利用したくなると思います。**

実際 (1) の結果をぶち込んで整理すると

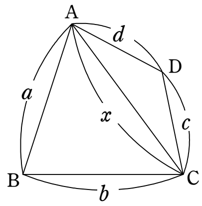
$$(ad+bc)y^2=(ac+bd)(ab+cd)$$
$$(ab+cd)x^2=(ad+bc)(ac+bd)$$

と，xy を登場させるために辺々かけると，気持ちよく約分できます。

【解答】



(図 1)



(図 2)

(1) (図 1) より余弦定理から，

$$\begin{cases} \cos A=\dfrac{a^2+d^2-y^2}{2ad} \\ \cos C=\dfrac{b^2+c^2-y^2}{2bc} \end{cases} \cdots 答$$

(図 2) より余弦定理から

$$\begin{cases} \cos B=\dfrac{a^2+b^2-x^2}{2ab} \\ \cos D=\dfrac{c^2+d^2-x^2}{2cd} \end{cases} \cdots 答$$

(2) 四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$\begin{cases} \angle A+\angle C=\pi \\ \angle B+\angle D=\pi \end{cases}$$

よって，$\begin{cases} \cos A=-\cos C \\ \cos B=-\cos D \end{cases}$

(1) の結果から

$$\begin{cases} \dfrac{a^2+d^2-y^2}{2ad}=-\dfrac{b^2+c^2-y^2}{2bc} & \cdots ① \\ \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2ab}=-\dfrac{c^2+d^2-x^2}{2cd} & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$2bc(a^2+d^2-y^2)=-2ad(b^2+c^2-y^2)$

これを整理すると，
$$\begin{aligned}(ad+bc)y^2&=a^2bc+bcd^2+ab^2d+ac^2d\\&=ab(ac+bd)+cd(ac+bd)\\&=(ac+bd)(ab+cd) \cdots ③\end{aligned}$$

② より，$2cd(a^2+b^2-x^2)=-2ab(c^2+d^2-x^2)$

これを整理すると，
$$\begin{aligned}(ab+cd)x^2&=a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2\\&=ac(ad+bc)+bd(ad+bc)\\&=(ad+bc)(ac+bd) \cdots ④\end{aligned}$$

③×④ より，

$$(ad+bc)(ab+cd)x^2y^2=(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$$

$$x^2y^2=(ac+bd)^2$$

$x>0$，$y>0$，$ac+bd>0$ より，$xy=ac+bd$ が成立する。

【総括】

今回の (2) の結果はトレミーの定理と呼ばれる有名な定理です。

幾何の問題では，これによってアッサリ終わってしまう問題もよくあります。

マークや穴埋めなどでは重宝することもありますし，記述式試験においては検算に使えることもあるでしょう。

なお，トレミーの定理の証明方法は様々です。

個人的には本問の

$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，$\cos D$ を計算して $\begin{cases} \cos A = -\cos C \\ \cos B = -\cos D \end{cases}$ という条件式を捌いていく方針が明確に思います。

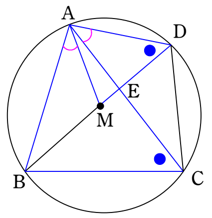
途中の式の整理で若干まごつく人もいるかもしれませんが，結論が分かっている証明においては

$x^2 = \cdots$，$y^2 = \cdots$ という形にして，$x^2y^2 = \cdots\cdots$ ともっていこう

という気持ちで，「示すべき形を見ればキレイになるんでしょ」という余裕をもってぶつかれば怖くないはずです。

色々やりだすとキリがないですが，いくつか別証明を載せておきます。

【別証明 1】



対角線 AC，BD の交点を E とする。

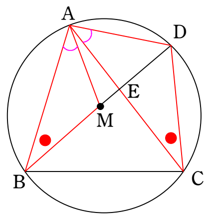
線分 BD 上に $\angle\mathrm{DAE} = \angle\mathrm{BAM}$ … ① となる点 M をとる。

このとき，① の両辺に $\angle\mathrm{MAE}$ を加えると $\angle\mathrm{DAM} = \angle\mathrm{BAC}$ … ②

また，円周角の定理から，$\angle\mathrm{ADM} = \angle\mathrm{ACB}$ … ③

②，③ より，$\triangle\mathrm{DAM} \sim \triangle\mathrm{CAB}$

ゆえに，$\mathrm{DA} : \mathrm{CA} = \mathrm{DM} : \mathrm{CB}$ で，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{DM}$ …(☆)



一方，円周角の定理から

$\angle\mathrm{ABM} = \angle\mathrm{ACD}$ … ④

①，④ から，$\triangle\mathrm{ABM} \sim \triangle\mathrm{ACD}$

ゆえに，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BM} : \mathrm{CD}$ で

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD} = \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BM}$ …(★)

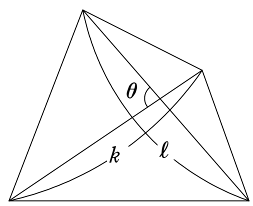
(☆)，(★) の辺々を加えると

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD} + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} &= \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BM} + \mathrm{AC}\cdot\mathrm{DM} \\ &= \mathrm{AC}(\mathrm{BM}+\mathrm{DM}) \\ &= \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \end{aligned}$$

となり，題意は示された。

【別証明 2】

補題

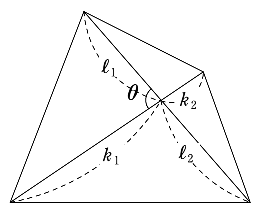


対角線の長さが k，ℓ

対角線のなす角のうち大きくない方を θ とするとき，この四角形の面積は

$$\frac{1}{2}k\ell\sin\theta$$

＜補題の証明＞



図のように長さを分割すると
この四角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}k_1\ell_1\sin\theta + \frac{1}{2}k_2\ell_1\sin(\pi-\theta)$$
$$+\frac{1}{2}k_2\ell_2\sin\theta + \frac{1}{2}k_1\ell_2\sin(\pi-\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\,(k_1\ell_1 + k_1\ell_2 + k_2\ell_1 + k_2\ell_2)$$

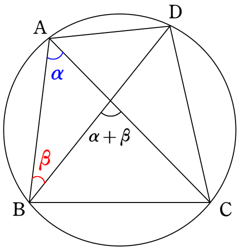
$$= \frac{1}{2}\sin\theta\,(k_1+k_2)(\ell_1+\ell_2)$$

$$= \frac{1}{2}k\ell\sin\theta$$

本問と同じように，

$$\mathrm{AB}=a\,,\ \mathrm{BC}=b\,,\ \mathrm{CD}=c\,,\ \mathrm{DA}=d\,,\ \mathrm{AC}=x\,,\ \mathrm{BD}=y$$

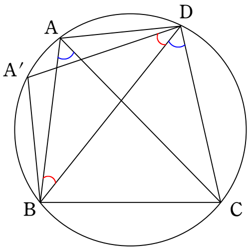
とする。



$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABD}=\beta$ とする。

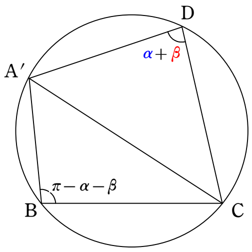
四角形 ABCD の面積を S とすると，
補題より

$$S=\frac{1}{2}xy\sin(\alpha+\beta)\ \cdots(*)$$



一方，$\triangle\mathrm{ABD}\equiv\triangle\mathrm{A'DB}$ となるように
円周上に A′ をとる。(A がある弧 BD 上)

このとき，$\angle\mathrm{BDC}=\alpha$，$\angle\mathrm{A'DB}=\beta$



$$\begin{aligned}
\text{また，}S&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\
&=\triangle\mathrm{A'BD}+\triangle\mathrm{BCD}\\
&=(\text{四角形 A}'\text{BCD の面積})\\
&=\triangle\mathrm{A'BC}+\triangle\mathrm{A'DC}\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{A'B}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin(\pi-\alpha-\beta)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\mathrm{A'D}\cdot\mathrm{CD}\cdot\sin(\alpha+\beta)\\
&=\frac{1}{2}bd\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)\\
&=\frac{1}{2}(ac+bd)\sin(\alpha+\beta)\ \cdots(**)
\end{aligned}$$

$(*)$，$(**)$ より，$\dfrac{1}{2}xy\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}(ac+bd)\sin(\alpha+\beta)$

すなわち，$xy=ac+bd$