実数 a，b，c に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ。

(1)　$2(a^4+b^4) \geqq (a+b)(a^3+b^3)$

(2)　$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$

＜ '07 和歌山県立医科大 ＞

【戦略 1】

(1)(2)　試験場では，ゴリゴリ差を取って考えればよいです。

(2) の式変形は途中少し「テクっている」ように見えるかもしれませんが，(1) の途中経過を活かそうと考えれば，自然に見える (はず)

【解 1】

(1)　$2(a^4+b^4)-(a+b)(a^3+b^3)=a^4+b^4-ab^3-a^3b$
$=a(a^3-b^3)-b(a^3-b^3)$
$=(a-b)(a^3-b^3)$

ここで，一般の実数 x，y に対して

$\begin{cases} x \geqq y \iff x^3 \geqq y^3 \\ x \leqq y \iff x^3 \leqq y^3 \end{cases}$ であるため，$(x-y)(x^3-y^3) \geqq 0$ …(*)

これより，$(a-b)(a^3-b^3) \geqq 0$

ゆえに，$2(a^4+b^4)-(a+b)(a^3+b^3) \geqq 0$，すなわち

$$2(a^4+b^4) \geqq (a+b)(a^3+b^3)$$

が成立する。

(2)　$3(a^4+b^4+c^4)-(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$

$=2a^4+2b^4+2c^4-ab^3-ac^3-a^3b-bc^3-a^3c-b^3c$

$=(a^4+b^4-ab^3-a^3b)+(b^4+c^4-bc^3-b^3c)+(c^4+a^4-ca^3-c^3a)$

$=(a-b)(a^3-b^3)+(b-c)(b^3-c^3)+(c-a)(c^3-a^3)$

$\geqq 0$ ($\because$ (*))

よって，$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$ が成立する。

【総括】

(1)，(2) ともに対称性のある不等式ですから

$a \geqq b \geqq c$ という設定の下で証明すれば十分です。

チェビシェフの不等式から，$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ に対して

$$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by) \quad \cdots ①$$

$$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(az+by+cx) \quad \cdots ②$$

が成り立ちます。

$a \geqq b$ のとき，$a^3 \geqq b^3$ ですから，① で $x=a^3$，$y=b^3$ とすれば

$$(a+b)(a^3+b^3) \leqq 2(a \cdot a^3+b \cdot b^3)$$

$a \geqq b \geqq c$ のとき，$a^3 \geqq b^3 \geqq c^3$ ですから，② で $x=a^3$，$y=b^3$，$z=c^3$ とすれば

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \leqq 3(a \cdot a^3+b \cdot b^3+c \cdot c^3)$$

となり，(1)，(2) は即座に終了します。

なお，チェビシェフの不等式が一般に拡張されることを考えると，本問も

$$n(a_1{}^4+a_2{}^4+\cdots+a_n{}^4) \geqq (a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3)$$

と一般化できることになります。