正の実数 a, b, c, x, y, z が $a \geqq b \geqq c$, $x \geqq y \geqq z$ を満たしているとき，次の不等式を証明しなさい。

(1) $2(ax+by) \geqq (a+b)(x+y)$

(2) $3(ax+by+cz) \geqq (a+b+c)(x+y+z)$

(3) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{3}{2}$

＜ '17 立正大 ＞

【戦略 1】

(1)(2) **愚直に差を取って計算してもたかが知れています。**

(3) (2) **の結果を利用することを考えます。**

大小関係の条件から $a+b \geqq c+a \geqq b+c > 0$ **です。**

これより， $\dfrac{1}{b+c} \geqq \dfrac{1}{c+a} \geqq \dfrac{1}{a+b} > 0$ **なので，**(2) **において**

$$x=\frac{1}{b+c},\ y=\frac{1}{c+a},\ z=\frac{1}{a+b}$$

とします。

【解 1】

(1)
$$\begin{aligned}2(ax+by)-(a+b)(x+y) &= 2ax+2by-(ax+ay+bx+by)\\ &= ax+by-ay-bx\\ &= a(x-y)-b(x-y)\\ &= (x-y)(a-b)\\ &\geqq 0\ (\because\ 条件\ a \geqq b,\ x \geqq y)\end{aligned}$$

(2) $3(ax+by+cz)-(a+b+c)(x+y+z)$

$=2(ax+by+cz)-(ay+az+bx+bz+cx+cy)$

$=(ax+by-ay-bx)+(ax+cz-az-cx)+(by+cz-bz-cy)$

$=(a-b)(x-y)+(a-c)(x-z)+(b-c)(y-z)$

$\geqq 0$ ($\because$ 条件 $a \geqq b \geqq c$, $x \geqq y \geqq z$)

(3) 条件から $a+b \geqq c+a \geqq b+c > 0$ より，$\dfrac{1}{b+c} \geqq \dfrac{1}{c+a} \geqq \dfrac{1}{a+b} > 0$

(2) において $x=\dfrac{1}{b+c}$, $y=\dfrac{1}{c+a}$, $z=\dfrac{1}{a+b}$ とすると

$$\begin{aligned}3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) &\geqq (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\ &= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\\ &= \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\\ &= 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\end{aligned}$$

ゆえに，$2\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right) \geqq 3$，すなわち

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{3}{2}$ が成立する。

【戦略 2】

$a \geqq b \geqq c$, $x \geqq y \geqq z$ **のとき**

x , y , z **を並べ替えたものを** p , q , r **とし ,** $(x , y , z)=(p , q , r)$ **とします。**

(**この対応の仕方はこの場合** $3!=6$ **通りあります。**)

任意の順列に対応する p , q , r **に対して**

$$ax+by+cz \geqq ap+bq+cr \geqq az+by+cx$$

が成り立ちます。

この「順列不等式」を利用します。

「大きいもの同士からペアにしていけば最大」というイメージです。

【解 2】

(1) $\begin{cases} ax+by \geqq ax+by \\ ax+by \geqq ay+bx \end{cases}$ で辺々足すと

$$2(ax+by) \geqq a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$$

(2) $\begin{cases} ax+by+cz \geqq ax+bz+cy \\ ax+by+cz \geqq az+by+cx \\ ax+by+cz \geqq ay+bx+cz \end{cases}$ で辺々足すと

$$\begin{aligned} 3(ax+by+cz) &\geqq a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z) \\ &=(a+b+c)(x+y+z) \end{aligned}$$

(3) 条件から $a+b \geqq c+a \geqq b+c>0$ より , $\dfrac{1}{b+c} \geqq \dfrac{1}{c+a} \geqq \dfrac{1}{a+b}>0$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}+\dfrac{b}{a+b} \\ \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{a}{a+b} \end{cases}$$

辺々足すと

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geqq \frac{c+b}{b+c}+\frac{a+c}{c+a}+\frac{b+a}{a+b}=3$$

ゆえに , $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqq \dfrac{3}{2}$

【総括】

<補足 1>

【解 1】から分かるように「正」という条件は不要です。

<補足 2>

順列不等式を用いて

$\begin{cases} ax+by \geqq ax+by \geqq ay+bx \\ ax+by \geqq ay+bx \geqq ay+bx \end{cases}$ と下からも はさむと

$$2(ay+bx) \leqq (a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$$

$$\frac{ay+bx}{2} \leqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \leqq \frac{ax+by}{2}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz \geqq ax+bz+cy \geqq az+by+cx \\ ax+by+cz \geqq az+by+cx \geqq az+by+cx \\ ax+by+cz \geqq ay+bx+cz \geqq az+by+cx \end{cases}$$

$$3(az+by+cx) \leqq (a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$$

$$\frac{az+by+cx}{3} \leqq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3} \leqq \frac{ax+by+cz}{3}$$

と下からも押さえられます。

一般に $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots \geqq b_n$ に対して

$$\frac{a_n b_1+\cdots\cdots+a_n b_1}{n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leqq \frac{a_1 b_1+\cdots+a_n b_n}{n}$$

が言えます。

これは

チェビシェフの不等式

と呼ばれます。(証明は上と同様に順列不等式を用いる)

<補足 3>

順列不等式は正式な日本語名がない (私は知らない) ので勝手に読んでいるだけで市民権はありません。

この順列不等式のイメージとしてよく用いられる例えとしては

500 円玉 , 100 円玉 , 1 円玉　と書かれた赤い紙 ($500 \geqq 100 \geqq 1$)
10 枚 , 5 枚 , 1 枚　と書かれた青い紙 ($10 \geqq 5 \geqq 1$)

に対して , 赤と青の紙でペアを作ります。

赤の紙に書かれている硬貨を , 青の紙に書かれている枚数だけもらえると思ってください。

どのようなペアを作ろうと思いますか ?

多くの金額をもらおうと思ったら
500円 × 10 枚 ,　100 円 × 5 枚 , 1 円 × 1 枚
と組合せたいですね。

大きいもの同士でペアを作った方が大きくなり , 逆順にペアを作ると小さくなるというわけです。

<補足 4>

⑶ は , 今回は $a \geqq b \geqq c$ という条件のもとで証明しましたが ,

一般に , 正の数 a , b , c に対して

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$$

が成り立ちます。

これは Nesbitt (ネスビット) の不等式と呼ばれます。

（対称性から $a \geqq b \geqq c$ として証明すれば一般性を失いません。）