

シャピロの巡回不等式

a, b, c, d を正の数とするとき、

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}} > 2$$

を示せ。

【戦略】

単純に差をとってどうこうする類の問題ではないことは分かると思います。

一般に正の数 x, y に対して $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ であることから

$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}}$ を小さくしようという気持ちで

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}} \\ & > \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{aligned}$$

と小さくしてやります。

結局 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \geq 2$ が示されればよいということが分かります。

これにより、 $\sqrt{\quad}$ のまま考える意味がなくなります。

$\sqrt{a} = A, \sqrt{b} = B, \sqrt{c} = C, \sqrt{d} = D$ と置きなおし、

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \geq 2$$

を示せばよいわけです。

定数以上であることを示すには、何か「約分されて消える」というカラクリを作り出す必要があるでしょう。

そのあたりを見据えつつ、コーシーシュワルツの不等式で仕留めます。

【解答】

一般に $x > 0, y > 0$ に対して、 $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}} \\ & > \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \geq 2$$

が示されれば題意が示される。

$\sqrt{a} = A, \sqrt{b} = B, \sqrt{c} = C, \sqrt{d} = D$ とおき、

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \geq 2$$

を示す。

$$\left(\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \right) \{ A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B) \}$$

$$\begin{aligned} & = \left\{ \left(\sqrt{\frac{A}{B+C}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{B}{C+D}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{C}{D+A}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{D}{A+B}} \right)^2 \right\} \\ & \quad \cdot \{ (\sqrt{A(B+C)})^2 + (\sqrt{B(C+D)})^2 + (\sqrt{C(D+A)})^2 + (\sqrt{D(A+B)})^2 \} \end{aligned}$$

$$\geq (A+B+C+D)^2 \dots \textcircled{1} \quad (\because \text{コーシー・シュワルツの不等式})$$

また、

$$\begin{aligned} & (A+B+C+D)^2 - 2 \{ A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B) \} \\ & = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2(AB + AC + AD + BC + BD + CD) \\ & \quad - 2(AB + AC + BC + BD + CD + AC + AD + BD) \\ & = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AC - 2BD \end{aligned}$$

$$= (A-C)^2 + (B-D)^2$$

$$\geq 0$$

ゆえに、

$$(A+B+C+D)^2 \geq 2 \{ A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B) \} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \right) \{ A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B) \} \\ & \geq 2 \{ A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B) \} \end{aligned}$$

両辺 $A(B+C) + B(C+D) + C(D+A) + D(A+B)$ (> 0) で割れば

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+D} + \frac{C}{D+A} + \frac{D}{A+B} \geq 2$$

を得るため、題意の不等式が成り立つことが示された。

【総括】

一般に次のような不等式が知られています。

— <シャピロ (Shapiro) の巡回不等式 > —

n は 3 以上の自然数で、かつ 12 以下の偶数、または 23 以下の奇数とし、 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ とする。このとき

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \dots + \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}$$

が成り立つ。

$n=3$ のとき

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \geq \frac{3}{2}$$

となり、これは Nesbitt (ネスビット) の不等式と呼ばれます。

$n=4$ のとき

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \frac{x_3}{x_4+x_1} + \frac{x_4}{x_1+x_2} \geq 2$$

という形であり、これは本問で示した形です。

$n=4$ でも結構大変だったと思います。

それが一般の証明ともなれば大変なのは火を見るよりも明らかでしょう。