tan とフィボナッチ数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=a_2=1$ かつ漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたすものとする。

自然数 n に対して実数 θ_n を $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\theta_n=\dfrac{1}{a_n}$ となるように定める。

(1) $a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{2k-1}$ を求めよ。

＜ ’13 京都府立医科大 ＞