数列 $\{a_n\}$ は $a_1=a_2=1$ かつ漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ をみたすものとする。

自然数 n に対して実数 θ_n を $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\theta_n=\dfrac{1}{a_n}$ となるように定める。

(1) $a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n\ (n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}\ (k=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{2k-1}$ を求めよ。

＜ '13 京都府立医科大 ＞

【戦略】

(1) **示すべき等式を** $a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}=-(-1)^n$ **とみて，これを証明します。**

$b_n=a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}$ **とおき，目に優しくします。**

$b_n=-(-1)^n$ **ということを示すためには，数列** $\{b_n\}$ **が公比** -1 **の等比数列であることを目指せばよいわけです。**

もちろん，漸化式的に $b_{n+1}=-b_n$ **であることを目指すことになるでしょう。**

(2) **細かなことを抜きにすれば，tan の服を着せた**

$$\tan(\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2})=\tan\theta_{2k}$$

を示す方向で動きたいところです。

ただ， $\tan(\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2})=\tan\theta_{2k}$ **が言えたからと言っても，単純に中身が等しいとはできません。**

基本的に θ_n **は** $\dfrac{\pi}{4}$ **以下なので，** $\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}$ **も** θ_{2k} **も鋭角の範囲内でおさまっています。**

そのことに留意しつつ記述すればよいでしょう。

(3) **部分和** $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\theta_{2k-1}$ **をひとまず考えて，その後** $N\to\infty$ **と極限をとればよいでしょう。**

$\sum$ **計算の基本の 1 つである「差分解からの和の中抜け」を狙って**

(2) **の等式を** $\theta_{2k-1}=\theta_{2k}-\theta_{2k+2}$ **と見て差分解します。**

【解答】

(1) $b_n=a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}$ とおく。

$$\begin{aligned}b_n&=a_{n+2}a_n+a_{n+1}a_n-a_{n+1}a_{n+2}\\&=a_{n+2}a_n+a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)\\&=a_{n+2}a_n+a_{n+1}\{(a_{n+1}+a_n)-a_n\}\\&=a_{n+2}a_n-a_{n+1}{}^2\ \cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=a_{n+3}a_{n+1}-a_{n+2}{}^2\\&=a_{n+1}(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+2}{}^2\\&=a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}{}^2-a_{n+2}{}^2\\&=a_{n+1}{}^2-a_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+1})\\&=a_{n+1}{}^2-a_{n+2}\{(a_{n+1}+a_n)-a_{n+1}\}\\&=a_{n+1}{}^2-a_{n+2}a_n\\&=-b_n\ (\because ①)\end{aligned}$$

$b_1=a_1a_3-a_2{}^2=1\cdot2-1^2=1$

よって数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列であり

$$b_n=(-1)^{n-1}=-(-1)^n$$

ゆえに，$a_n(a_{n+2}+a_{n+1})-a_{n+1}a_{n+2}=-(-1)^n$

すなわち $n=1,2,\cdots$ に対して

$$a_n(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}a_{n+2}-(-1)^n$$

が成立する。

(2) $a_1=a_2=1$，$a_2=3$ なので，$n\geqq3$ に対して $a_n>1$ が成立する。

これより，$0<\tan\theta_n\left(=\dfrac{1}{a_n}\right)<1$，及び $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ を考えると

$$0<\theta_n<\frac{\pi}{4}\ (n\geqq3)$$

自然数 k に対し，$\begin{cases}0<\theta_{2k+1}<\dfrac{\pi}{4}\\0<\theta_{2k+2}<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ が成立し

$$0<\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}<\frac{\pi}{2}\ \cdots①$$

一方，$0<\theta_{2k}<\dfrac{\pi}{2}\ \cdots②$

① から $\tan(\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2})$ は定義されることになり，

$$\tan(\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2})=\frac{\tan\theta_{2k+1}+\tan\theta_{2k+2}}{1-\tan\theta_{2k+1}\tan\theta_{2k+2}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a_{2k+1}}+\dfrac{1}{a_{2k+2}}}{1-\dfrac{1}{a_{2k+1}}\cdot\dfrac{1}{a_{2k+2}}}$$

$$=\frac{a_{2k+2}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}a_{2k+1}-1}$$

$$=\frac{a_{2k+2}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}a_{2k+1}-(-1)^{2k}}$$

$$=\frac{a_{2k+2}+a_{2k+1}}{a_{2k}(a_{2k+2}+a_{2k+1})}$$

(1) **を活用**

$$=\frac{1}{a_{2k}}$$

$$=\tan\theta_{2k}$$

①，② の範囲を考えると，$\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}$ が成立する。

(3)　(2) の結果から，$\theta_{2k+1}=\theta_{2k}-\theta_{2k+2}$ $(k\geqq1)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\theta_{2k-1}&=\theta_1+\sum_{k=1}^{N-1}\theta_{2k+1}\\&=\theta_1+\sum_{k=1}^{N-1}(\theta_{2k}-\theta_{2k+2})\\&=\theta_1+\{(\theta_2-\theta_4)+(\theta_4-\theta_6)+\cdots\cdots+(\theta_{2N-2}-\theta_{2N})\}\\&=\theta_1+\theta_2-\theta_{2N}\\&=\frac{\pi}{2}-\theta_{2N}\quad\left(\because\theta_1=\theta_2=\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ は単調増加で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{2k-1}&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\theta_{2k-1}\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{2N}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

① より，$a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2=(-1)^{n-1}$ が成立します。

これはフィボナッチ数列に関して付随する有名な

「カッシーニ・シムソンの定理」

というものです。

また，今回の (2) で扱った，$\theta_{2k+1}+\theta_{2k+2}=\theta_{2k}$ という性質は

$$\begin{cases}\tan\theta_{2k}=\dfrac{1}{a_{2k}}\\ \tan\theta_{2k+1}=\dfrac{1}{a_{2k+1}}\\ \tan\theta_{2k+2}=\dfrac{1}{a_{2k+2}}\end{cases}\quad\text{であることから}\quad\begin{cases}\theta_{2k}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k}}\\ \theta_{2k+1}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k+1}}\\ \theta_{2k+2}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k+2}}\end{cases}$$

なので，$\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k+1}}+\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k+2}}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_{2k}}$

が言えます。

例えば，$\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_3}+\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_4}=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{a_2}$ です。

これより，$\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ ということが言えるでしょう。

さらに，(3) の $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\theta_{2k-1}=\theta_1+\theta_2-\theta_{2N}$ において，$N=3$ としてみると

$\theta_1+\theta_3+\theta_5=\theta_1+\theta_2-\theta_6$，すなわち，$\theta_3+\theta_5+\theta_6=\theta_2$ であり

$$\mathrm{Arctan}\frac{1}{a_3}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{a_5}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{a_6}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{a_2}$$

となります。

これは，

$$\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}+\mathrm{Arctan}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

ということを意味します。

以前に実践演習で

「マチンの公式とその周辺の等式」

というものを扱いましたが，本問はそれに付随するトピックスです。