

sin の和と cos の積【類題】

次の問いに答えよ。

- (1) $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し、成り立たないときは反例を挙げよ。

< '14 大阪大 >

【戦略】

- (1) $\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}}$ であることから

示すべき等式の右辺 $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$ の分子分母に対して

和積公式を用いるという方針がインスピレーションされます。

- (2) 簡単な組で実験してみます。

$x=y=z$ のときは等式は成り立ちます。

(左辺は $\tan x$, 右辺は $\frac{3\sin x}{3\cos x} (= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x)$)

次に, x, y, z のうち2個が0などの簡単なケースを調べてみると

$(x, y, z) = (0, 0, \pi)$ とした瞬間, 反例が見つかります。

【解答】

- (1) 和積公式から,
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに, } \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} &= \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}} \\ &= \tan \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

となり, 等式 $\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$ が成立する。

- (2) $(x, y, z) = (0, 0, \pi)$ とすると

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z} = \frac{0+0+0}{1+1-1} = 0$$

ゆえに, $\tan \frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$ は必ずしも成り立たない。

【総括】

反例は $(x, y, z) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$ など, その他にも沢山あり, 反例祭りです。