sin の和と cos の積

(1) $x+y=\pi$ を満たす実数 x，y に対して，次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sin x+\sin y=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

(2) $x+y+z=\pi$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$$

(3) $x+y+z+w=\pi$ を満たす実数 x，y，z，w に対して，等式

$$\sin x+\sin y+\sin z+\sin w=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{w}{2}$$

は必ずしも成り立たないことを示しなさい。

＜ ’08 首都大学東京 (東京都立大) ＞

【戦略】

(1) **従属 2 変数なので，1 文字消去路線が素直でしょう。**

(2) **3 つの角度を足して π なので三角形の内角などで凝ったことを考えたくなるかもしれませんが，負の角度も含めての証明なので，図形的に攻めるのはマズイでしょう。**

ここも素直に 1 文字消去します。

とにかく $\sin x+\sin y+\sin z$ という和を $4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$ という積の形にもっていくため，和積公式を随所で用いるのは想定内でしょう。

(3) **反例を探します。**

ひとまず均等に，$x=y=z=w=\frac{\pi}{4}$ などで考えたくなるでしょうか。

試しにやってみると，成り立たないことが言え，即解決です。

【解答】

(1) 条件から $y=\pi-x$ なので

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y&=\sin x+\sin(\pi-x)\\&=\sin x+\sin x\\&=2\sin x\\&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}&=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi-x}{2}\\&=4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\\&=4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，題意は示された。

(2) 条件より $z=\pi-(x+y)$

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z&=\sin x+\sin y+\sin\{\pi-(x+y)\}\\&=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot2\cos\frac{\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}}{2}\cos\frac{\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}}{2}\\&=4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{-y}{2}\\&=4\sin\frac{\pi-z}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\\&=4\cos\frac{z}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，題意は示された。

(3) $x=y=z=w=\frac{\pi}{4}$ とすると

$$\sin x+\sin y+\sin z+\sin w=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot4=2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{w}{2}&=4\cos^4\frac{\pi}{8}\\&=\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2\\&=\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\\&=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\&=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり，$\sin x+\sin y+\sin z+\sin w=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{w}{2}$ は成り立たない。

【総括】

(2) は有名事実としてよく出題されますが，三角形の内角として出題されることが多いです。

(3) の反例は他にも多々あります。

例えば，$x=y=\dfrac{\pi}{6}$，$z=w=\dfrac{\pi}{3}$ とすると，$x+y+z+w=\pi$ で

$$\sin x+\sin y+\sin z+\sin w=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{w}{2}&=4\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\\&=4\cos^2\frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=3\cos^2\frac{\pi}{12}\\&=3\cdot\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}\\&=\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}\end{aligned}$$

で，反例となっています。

そう考えると，(3) の反例探しがある意味一番楽だったかもしれませんし，拍子抜けしてしまったかもしれません。