1から12までの自然数を次のように並べて数を作ると15桁の数になる。また，この数に数字1は5回現れる。

$$123456789101112$$

(1)　1から始めて3桁以下の自然数を全て並べてできる数

$$1234\cdots\cdots997998999$$

は何桁の数か。

(2)　1から始めて n 桁以下の自然数を全て並べてできる数を A_n とする。この A_n は何桁の数であるか。また，数 A_n には数字1が何回現れるか。

＜ '97 慶応義塾大 ＞

【戦略】

(1)　**イメージとしては，A_3 であれば，**

$$\underbrace{12\cdots\cdots9}_{\substack{1\text{桁が}\\9\text{個}}}\Big/\underbrace{101112\cdots\cdots9899}_{\substack{2\text{桁が}\\90\text{個}}}\Big/\underbrace{100101\cdots\cdots998999}_{\substack{3\text{桁が}\\900\text{個}}}$$

合計 $1\cdot9+2\cdot90+3\cdot900=2889$【桁】のように考えればよいわけです。

(2)　**桁数については(1)の要領で考えればよいでしょう。**

k 桁の数は $10^{k-1}\sim10^k-1$ の

$$(10^k-1)-10^{k-1}+1=10^k-10^{k-1}\text{【個】}$$

ですから

$$\sum_{k=1}^{n}k\,(10^k-10^{k-1})$$

を計算すればよいでしょう。

この $\sum$ 計算については一瞬「等差×等比型」が頭をよぎりますが

上手いこと $\sum(b_k-b_{k-1})$ という差分解を狙えそうです。

次に，1が現れる回数ですが，各位の1の個数をカウントしていけばよいでしょう。

例えば A_2 であれば

01　11　21　……　91　**と，1の位が1のものを数える（10回）**

10　11　12　……　19　**と，10の位が1のものを数える（10回）**

と，合計20回現れます。

この要領で，一般の A_n についても対応できるでしょう。

【解答】

(1)　1桁の数は1～9までの9個

2桁の数は10～99までの $99-10+1=90$【個】

3桁の数は100～999までの $999-100+1=900$【個】

よって，$1\cdot9+2\cdot90+3\cdot900=2889$【桁】…㊟

(2)　k 桁の数は $10^{k-1}\sim10^k-1$ であり，その個数は

$$(10^k-1)-10^{k-1}+1=10^k-10^{k-1}\text{【個】}$$

よって，A_n の桁数は

$$\sum_{k=1}^{n}k\,(10^k-10^{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot10^k-(k-1)\cdot10^{k-1}-10^{k-1}\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}\quad(b_k=k\cdot10^k\text{ とおいた。ただし }b_0=0)$$

$$=(b_1-b_0)+(b_2-b_1)+\cdots+(b_b-b_{n-1})-\frac{10^n-1}{10-1}$$

$$=b_n-b_0-\frac{10^n-1}{9}$$

$$=n\cdot10^n-\frac{10^n-1}{9}$$

$$=\frac{9n\cdot10^n-(10^n-1)}{9}$$

$$=\frac{(9n-1)\cdot10^n+1}{9}\text{【桁】}\quad\cdots\text{㊟}$$

次に A_n に現れる数字1の回数について

□□□……□1　……　10^{n-1}【個】

□□□……1□　……　10^{n-1}【個】

⋮

1□□……□□　……　10^{n-1}【個】

よって，A_n に現れる数字1の回数は

$$n\cdot10^{n-1}\text{【回】}\cdots\text{㊟}$$

【総括】

簡単な A_2 などで実験してみて要領をつかみ，それを一般論に拡張するという態度が威力を発揮する類の問題でした。