

3 整数に関する不定方程式

相異なる自然数 a, b, c があり, どの 2 つの和も残りの数で割ると 1 余るとする。 $a < b < c$ として次の問いに答えよ。

- (1) $a + b$ を c で割ったときの商はいくらか。
- (2) $a + c$ を b で割ったときの商はいくらか。
- (3) a, b, c を求めよ。

< '90 早稲田大 >

【戦略】

以下登場する文字は断りのない限り整数を表すものとします。

問題文で主張している条件は $\begin{cases} a + b = cK + 1 \\ b + c = aM + 1 \\ c + a = bL + 1 \end{cases}$ のようなシチュエーションです。

文字の数に対して, 式の数が足りません。(不定方程式といいます。)

整数問題においては $\begin{cases} \text{① : 積の形からの約数拾い} \\ \text{② : 余りで分類} \\ \text{③ : 範囲を絞る (評価する)} \end{cases}$ を考えるのが常識です。

約数の拾い上げについては

「因数分解」, または「整数 = 分数 の形を作り分母を覗く」

という態度なのですが, どちらを狙っていてもかなり厳しいですし, 余りで分類という態度も, 何で割った余りに注目するべきなのが見いだしにくいです。

実を言うと, 文字が 3 文字以上になると, 「範囲を絞る (評価する)」という態度が功を奏することが大変多いです。

そこで「等式」は諦め, 「不等式」を繋いでいくことを考えます。

仮にそれを知らなかったとしても, 本問には明らかに対称性があります。

今回は問題文の条件で $a < b < c$ という大小関係がついていますが, 言われなくても自分でこの大小関係を導入し, それを利用して範囲を絞ることで様々な値を特定していきます。

【解答】

- (1) 求める商を K (K は非負整数) とおく。

条件より

$$a + b = cK + 1 \cdots \text{①}$$

ゆえに $cK = a + b - 1$

ここで, $a < b < c$ より,

$$a + b - 1 < c + c - 1 < c + c$$

だから, $cK < 2c$ で $K < 2$

これを満たす非負整数 K は $K = 0, 1$

$K = 0$ とすると①より $a + b = 1$ となりこれを満たす自然数 a, b は存在せず不適。

ゆえに $K = 1$ を得る。

よって求める商は 1 … ㊦

- (2) 求める商を L (L は非負整数) とおく。

条件より

$$a + c = bL + 1 \cdots \text{②}$$

ゆえに $bL = a + c - 1$

- (1) より, $K = 1$ を①に代入して, $a + b = c + 1$, すなわち

$$c = a + b - 1$$

- ② より $bL = a + c - 1 = 2a + b - 2 \cdots \text{③}$

今 $a < b$ だから $2a + b - 2 < 2b + b - 2 < 2b + b$ で, $bL < 3b$,

すなわち $L < 3$ を得る。

これを満たす非負整数 L は $L = 0, 1, 2$

$L = 0$ とすると②より $a + c = 1$ となりこれを満たす自然数 a, c は存在せず不適。

$L = 1$ とすると③より $b = 2a + b - 2 \Leftrightarrow a = 1$

②より $1 + c = b + 1 \Leftrightarrow b = c$ となり $b < c$ に不適

よって $L = 2$ となり, 求める商は 2 … ㊦

(3) ③ 及び (2) より, $2b = 2a + b - 2 \Leftrightarrow b = 2a - 2 \cdots ④$

② 及び (2) より, $a + c = 2b + 1$

④ より $a + c = 2(2a - 2) + 1 \Leftrightarrow c = 3a - 3 \cdots ⑤$

今 $b + c$ を a で割った商を M (M は非負整数) とおく。

条件より $b + c = aM + 1$

④, ⑤ より $(2a - 2) + (3a - 3) = aM + 1$, すなわち $aM = 5a - 6$

$$\text{ゆえに } M = 5 - \frac{6}{a} \Leftrightarrow 5 - M = \frac{6}{a}$$

左辺は整数なので右辺も整数だから a は 6 の約数。

a は自然数なので $a = 1, 2, 3, 6$

$a = 1$ のとき $M = 5 - \frac{6}{1} = -1$ となり $M \geq 0$ に反する。

したがって $a = 2, 3, 6$

④, ⑤より $(a, b, c) = (2, 2, 3), (3, 4, 6), (6, 10, 15)$

このうち, $a < b < c$ を満たすのは

$$(a, b, c) = (3, 4, 6), (6, 10, 15) \cdots \text{答}$$

【総括】

難問です。

実際にこの年の受験生の 8 割ぐらいが 0 点だった一問だそうです。

6 文字の連立方程式を解きにいく, すなわち等式を繋いでいくという態度は諦め, 不等式を繋いでいくのが本問のカギですが, これは経験を積んでいないとスムーズにはいきません。

【戦略】でも言いましたが, 文字の数が 3 文字以上になると, この評価するという態度が功を奏することが大変多いです。

(乱暴な物言いですが一つの有力な選択肢として知っておいてください)

ちなみに, 本問の流れは少し気持ちが悪いです。

例えば (1) の議論の流れは, $a + b$ を c で割った商が ” あるとしたら 1 である ” ということです。

$K = 0, 1$ で 0 は不適だから $K = 1$ という結論の付け方なので, もしかしたら, $K = 1$ も不適になる (すなわち題意の a, b, c が存在しない) 可能性も残ります。

そんな中で (1) の結論を「求める商は 1」としていいのかという気持ち悪さが残るわけです。(2) も同様です)

実際には (3) で題意の a, b, c の存在が保証され, (1), (2) の結論が妥当であることも保証されるのですが, 設問の流れ的には気持ち悪さを拭えない人もいて当然だと思います。