複素数

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

が $z^5=1$ を満たすとき，次の問に答えよ。ただし，a，b，r は正の実数で，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) r の値と θ の値を求めよ。
(2) z を解とする整数係数の 4 次方程式を見出せ。
(3) $z+\dfrac{1}{z}$ を解とする整数係数の 2 次方程式を求めよ。
(4) a の値を求めよ。

＜ ’97 新潟大 改 ＞

【戦略】

(1) **ド・モアブルの定理により $r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)=1$ として絶対値と偏角を比べるという定番の処理です。**

(2) $z^5=1$，**すなわち** $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ **を満たしていることと，$z\fallingdotseq1$ より $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ であることが分かります。**

今回は「見出せ」ですから，そのまま $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を答えとします。

(3)(4) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ **の両辺を z^2 ($\fallingdotseq0$) で割ると**

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0,\ \text{すなわち}\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

となります。

ここで，$z+\dfrac{1}{z}$ を解にもつ整数係数 2 次方程式を $x^2+x-1=0$ としたくなる気持ちは分かりますが，(2) と違い「求めよ」なので，

「これ以外にない」

ということまで含めて論証します。

実はここで先に (4) の方が解決してしまうのですが

$$z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=2a\left(=2\cos\frac{2}{5}\pi\right)>0\ \text{なので}$$

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$ **であることから** $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **となります。**

我々が欲しい整数係数 2 次方程式は $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ を解にもつだけでなく $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ も解にもちます。(整数係数の n 次方程式の性質)

そうなると， $m\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

すなわち $mx^2+mx-m=0$ (m は整数) という形に限られます。

【解答】

(1) $z^5=1$ より，ド・モアブルの定理から

$$r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)=1$$

右辺と左辺の絶対値を比べると，$r^5=1$

r は正の実数より，$r=1$ …答

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<5\theta<\dfrac{5}{2}\pi$ であるため，この範囲で

$\begin{cases}\cos5\theta=1\\ \sin5\theta=0\end{cases}$ を満たすのは $5\theta=2\pi$ のみ。

ゆえに，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ …答

(2) この z は $z^5=1$，すなわち $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ を満たす。

$z\fallingdotseq1$ なので，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を満たす。

ゆえに，z を解にもつ整数係数の 4 次方程式として

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0\ \cdots\text{答}$$

がある。

(3) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の両辺を z^2 ($\fallingdotseq0$) で割ると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0,\ \text{すなわち}\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

ここで，$|z|^2=1$ より，$z\overline{z}=1$ であるから，

$z+\dfrac{1}{z}=z+\overline{z}=2a\left(=2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)>0\ \cdots(*)$ であるため，

$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である。

求める方程式は整数係数ゆえ，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ を解にもつならば，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ も解にもつ。

したがって，そのような 2 次方程式は

$$m\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

すなわち $mx^2+mx-m=0$ (m は任意の整数)…答

(4) $(*)$ より，$a=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ …答

【総括】

z は未知数ではなく，$\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ という具体的な数です。

だから，例えば $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ などを「方程式」と呼んでよいかは疑問です。個人的には方程式とは呼ばないと思います。
（$2+3-5=0$ のような「具体値の和が 0」というものを方程式と呼ぶか？というと呼ばないでしょう。）

実は (2) も「求めよ」でしたが，うるさいことになるので変えました。

(3) も出題側が

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$ から $x^2+x-1=0$ を答えとする答案をどこまで認めたのかは分かりませんし，案外何も考えず出題した可能性すらあり得ます。

細かな部分にチャチャを入れてメインの内容がボケてしまいましたが，
一応本問は $\cos\dfrac{2}{5}\pi$（$\cos 72^\circ$）を求めるという趣旨です。