複素数 α $(\alpha \neq 1)$ を 1 の 5 乗根とし，$\overline{\alpha}$ を α に共役な複素数とするとき，次の問に答えよ。

(1) $\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$ であることを示せ。

(2) (1) を利用して，$t=\alpha+\overline{\alpha}$ は $t^2+t-1=0$ をみたすことを示せ。

(3) (2) を利用して $\cos 72^\circ$ の値を求めよ。

＜ '97 金沢大 ＞

【戦略】

(1) **α が 1 の 5 乗根ということは $\alpha^5=1$ を満たしているということです。**

これについては $\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ という因数分解を考えれば $(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$ を得ます。

もちろん条件 $\alpha \neq 1$ より $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たすことになります。

これは今回示すべき目標の分母を払った形なので，逆に α^2（$\neq 0$）で両辺割ってやればよいでしょう。
（もちろん相反方程式の経験があれば即変形も可能です。）

(2) **あえて分母を払った $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ ではなく $\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0$ という形をヒントとしていることに目を向けてください。**

$|\alpha|=1$ であることから $|\alpha|^2=1$，すなわち $\alpha\overline{\alpha}=1$ で，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ となります。

ヒントが効いてくるため，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\alpha^2}$ を消す形で

$$\alpha^2+\alpha+1+\overline{\alpha}+(\overline{\alpha})^2=0$$

と見るのが自然でしょう。

$\alpha+\overline{\alpha}=t$ とおけという指示があるに等しいわけなので当然

$\alpha^2+(\overline{\alpha})^2$ を t を用いて表しにいきます。

$$\begin{aligned}\alpha^2+(\overline{\alpha})^2&=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}\\&=t^2-2|\alpha|^2\\&=t^2-2\end{aligned}$$

となり，解決です。

(3) **1 の 5 乗根の 1 つとして，$\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ があります。**

つまり，$\alpha=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ に対して (2) の関係式が成立するわけです。

我々が欲しい $\cos 72^\circ$ は α の実部で，$\cos 72^\circ=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ です。

もちろん，$\alpha+\overline{\alpha}$（$=t$）の値としてあり得るのは (2) の 2 次方程式の解 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ですが，どちらが適するかについては $\cos 72^\circ$ が正の値であることを考えれば明らかです。

【解答】

(1) $\alpha^5=1$ より，$\alpha^5-1=0$ であり，$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha \neq 1$ より，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たす。

$\alpha \neq 0$ より，両辺を α^2 でわると

$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

が成り立つことになる。

(2) $|\alpha|=1$ であることから，$|\alpha|^2=1$，すなわち $\alpha\overline{\alpha}=1$

$\alpha \neq 0$ であることから $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

(1) より，$\alpha^2+\alpha+1+\overline{\alpha}+(\overline{\alpha})^2=0$ …①

ここで，$t=\alpha+\overline{\alpha}$ とおくと

$$\begin{aligned}\alpha^2+(\overline{\alpha})^2&=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}\\&=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2|\alpha|^2\\&=t^2-2\end{aligned}$$

ゆえに，① から，$(t^2-2)+t+1=0$

すなわち $t^2+t-1=0$ が成り立つことになる。

(3) $\alpha=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ とすると，ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}\alpha^5&=(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ)^5\\&=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ\\&=1\end{aligned}$$

$t=\alpha+\overline{\alpha}$ とおいたとき，t は $t^2+t-1=0$ を満たす。

すなわち $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。

ここで，$\cos 72^\circ$ は α の実部であり，$\cos 72^\circ=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\dfrac{t}{2}$ である。

今，$\cos 72^\circ$ は正の値であるため，$\cos 72^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ …答

【総括】

丁寧な誘導が付いているため，流れに乗って完答したいレベルの問題です。

最後の符号の吟味について気持ち悪さをもった人のために補足しておきます。

通常 1 の 5 乗根として一番ピンとくるのは $\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ ですが，
一応 $\cos 144^\circ + i\sin 144^\circ$ も，

$$\begin{aligned}(\cos 144^\circ + i\sin 144^\circ)^5 &= \cos 720^\circ + i\sin 720^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので，$\alpha = \cos 144^\circ + i\sin 144^\circ$ も 1 の 5 乗根です。

「1 の 5 乗根 α に対して $\alpha + \overline{\alpha}$ としてあり得る値は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{，もしくは }\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

のどちらかですよ。どちらかについては 1 の 5 乗根 α の実部をどう設定したのかによりますよ」

というのが (2) の主張です。

なので，1 の 5 乗根 α を $\alpha = \cos 144^\circ + i\sin 144^\circ$ と設定して考えれば

$$\cos 144^\circ = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

ということになります。