a，b，c，d，e を実数の定数とし，x の 4 次式

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ \ (a\neq 0)$$

を考える。

x の 4 次方程式 $f(x)=0$ が連続した 4 つの整数解をもつとき，$f(x)$ はある 2 つの 2 次関数 $g(x)$，$h(x)$ によって，

$$f(x)=g(h(x))$$

と表せることを示せ。

＜ ’06 京都府立医科大 オマージュ ＞

【戦略】

(1) **ひとまず条件である 4 つの連続整数解を**

$$x=m,\ m+1,\ m+2,\ m+3$$

などと設定します。

そうすると，因数定理から

$$f(x)=a(x-m)\{x-(m+1)\}\{x-(m+2)\}\{x-(m+3)\}$$

と表せます。

これより $x=\dfrac{2m+3}{2}$ **について対称であることが想像つくと思います。**

そうなれば $f\left(\dfrac{2m+3}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{2m+3}{2}+x\right)$ **であることを目指すことになります。**

これ以降は「例題で学んだ技」が使えそうです。

【解答】

条件より，$f(x)=0$ の 4 つの連続整数解を

$$x=m,\ m+1,\ m+2,\ m+3$$

とする。

このとき，

$$f(x)=a(x-m)\{x-(m+1)\}\{x-(m+2)\}\{x-(m+3)\}$$

と表せる。

$$f\left(\frac{2m+3}{2}-x\right)=a\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{2m+3}{2}+x\right)=a\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

であり，任意の実数 x に対し，

$$f\left(\frac{2m+3}{2}-x\right)=f\left(\frac{2m+3}{2}+x\right)$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは

直線 $x=\dfrac{2m+3}{2}$ について対称

である。

$f_1(x)=f\left(x+\dfrac{2m+3}{2}\right)$ と定める。

$y=f_1(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{2m+3}{2}$ だけ平行移動したものであり，$y=f_1(x)$ は

y 軸対称な 4 次関数

である。

つまり，$y=f_1(x)$ は最高次の係数が a であるような 4 次の偶関数なので，

$$f_1(x)=ax^4+px^2+q$$

という形で表せる。

一方，$y=f_1(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{2m+3}{2}$ だけ平行移動したグラフは $y=f(x)$ のグラフであるため，$f(x)=f_1\left(x-\dfrac{2m+3}{2}\right)$

これより，$f(x)=a\left(x-\dfrac{2m+3}{2}\right)^4+p\left(x-\dfrac{2m+3}{2}\right)^2+q$ と表せるため

$$g(x)=ax^2+px+q\ ,\ \ h(x)=\left(x-\frac{2m+3}{2}\right)^2$$

という 2 つの 2 次関数を用いて，$f(x)=g(h(x))$ と表すことができる。

【総括】

色々な問題に紛れてノーヒントでこいつがおいてあった場合，間違いなく難問の部類に入るでしょう。