４次関数を２つの２次関数の合成で表す

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。関数 $y=f(x)$ のグラフが y 軸と平行なある直線に関して対称であるとする。

(1)　a，b，c，d が満たす関係式を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ は２つの２次関数の合成関数になっていることを示せ。

＜ '06 京都府立医科大 ＞

【戦略】

(1)　**$x=k$ という直線に対して対称であるとすると**

$f(k+x)=f(k-x)$ が任意の実数 x に対して成立します。

つまり，$f(k+x)-f(k-x)=0$ が x についての恒等式であると話を進めていけばよいわけです。

根性で展開して整理してもいいですが，置き換えを駆使しながら少しでも目に優しく処理していこうと思います。

(2)　**(1) を正しく処理しきれば，$a^3-4ab+8c=0$ という関係式が得られていると思います。**

ここから，１文字消去したいですが，消しやすいのは c でしょうか。

そこで，$c=\dfrac{4ab-a^3}{8}$ として，$f(x)$ にぶち込みます。

題意によれば $f(x)$ が

$$(2\text{次式})^2+A\,(2\text{次式})+B$$

という形で表現できるということですね。

$c=\dfrac{4ab-a^3}{8}$ として，$f(x)$ にぶち込んだ時点で条件は使い切りましたから，あとはガッツで

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+\frac{4ab-a^3}{8}x+d$$

を上記の形を目指して式変形していきます。

まずは $(x^2+\quad)^2$ の形を作りたいという気持ちが芽生えるでしょう。

$(2\text{次式})^2+A\,(2\text{次式})+B$ の $A\,(2\text{次式})+B$ は２次以下の項で，x^3 の項を調節することはできません。

したがって，x^3 の項は $(2\text{次式})^2$ の部分に組み込むように考えたいと思います。

そうなると

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+\frac{4ab-a^3}{8}x+d$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2+bx^2-\frac{a(a^2-4b)}{8}x+d$$

と見たくなります。

ここからは一気に手なりに進んでいくと思います。

【解答】

(1)　条件から $y=f(x)$ が直線 $x=k$ について対称であるとする。

このとき，任意の実数 x に対して

$$f(k+x)=f(k-x)$$

すなわち　$f(k+x)-f(k-x)=0$ …①　が成立する。

$f(k+x)=(k+x)^4+a\,(k+x)^3+b\,(k+x)^2+c\,(k+x)+d$

$f(k-x)=(k-x)^4+a\,(k-x)^3+b\,(k-x)^2+c\,(k-x)+d$

$k+x=K$，$k-x=L$ とおき，辺々引くと ① より

$$(K^4-L^4)+a\,(K^3-L^3)+b\,(K^2-L^2)+c\,(K-L)=0$$

$(K-L)\{(K+L)(K^2+L^2)+a\,(K^2+KL+L^2)+b\,(K+L)+c\}=0$

$K-L=2x$，$K+L=2k$，$K^2+L^2=2k^2+2x^2$，$KL=k^2-x^2$ に注意すると

$$2x\{4k\,(k^2+x^2)+a\,(3k^2+x^2)+2kb+c\}=0$$

$$x\{(4k+a)x^2+4k^3+3ak^2+2bk+c\}=0$$

展開して整理すると

$$(4k+a)x^3+(4k^3+3ak^2+2bk+c)x=0$$

これが任意の実数 x に対して成立するから

$$\begin{cases} 4k+a=0 & \cdots② \\ 4k^3+3ak^2+2bk+c=0 & \cdots③ \end{cases}$$

② より，$k=-\dfrac{a}{4}$

③ に代入して，$4\left(-\dfrac{a^3}{64}\right)+3a\cdot\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{ab}{2}+c=0$

これを整理すると，$a^3-4ab+8c=0$ …答

(2)　(1) から $c=\dfrac{4ab-a^3}{8}$ であり，

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+\frac{4ab-a^3}{8}x+d$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2+bx^2-\frac{a(a^2-4b)}{8}x+d$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}x^2-\frac{a(a^2-4b)}{8}x+d$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+d$$

となり，２つの２次関数 $g(x)=x^2-\dfrac{a^2-4b}{4}x+d$，$h(x)=x^2+\dfrac{a}{2}x$ に対して，$f(x)=g\,(h(x))$ という表せ，題意は示された。

【戦略 2】 4 次式の偶関数を活かす

$y=f(x)$ が $x=k$ について対称ということは，x 軸方向に$-k$ だけ平行移動した $y=f(x+k)$ のグラフは y 軸対称であるということが言えます。

$f_1(x)=f(x+k)$ とおくと，$f_1(x)$ は 4 次式であり，最高次の係数が 1 であることは変わりません。

したがって，$f_1(x)$ は最高次の係数が 1 である 4 次の偶関数です。

ゆえ，$f_1(x)=x^4+px^2+q$ と表せます。

$y=f_1(x)$ を x 軸方向に k だけ平行移動させれば，再び $y=f(x)$ となります。

すなわち，$f(x)=f_1(x-k)$ です。

したがって，$f(x)=(x-k)^4+p(x-k)^2+q$ です。

これは $g(x)=x^2+px+q$，$h(x)=(x-k)^2$ に対して $f(x)=g(h(x))$ と表せていることになります。

【解 2】(2) について

$y=f(x)$ のグラフが $x=k$ について対称であるとき，$f_1(x)=f(x+k)$ とする。

$y=f_1(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-k$ だけ平行移動させたものであり，

$y=f_1(x)$ は y 軸について対称

$f_1(x)$ は最高次の係数が 1 の 4 次式であるため

$f_1(x)$ は最高次の係数が 1 である 4 次の偶関数

ゆえに，p，q を実数として $f_1(x)=x^4+px^2+q$ と表せる。

一方，$y=f_1(x)$ のグラフを x 軸方向に k だけ平行移動させれば $y=f(x)$ のグラフとなるため

$f(x)=f_1(x-k)$ と表せる。

ゆえに，$f(x)=(x-k)^4+p(x-k)^2+q$ と表せる。

これは 2 つの 2 次関数 $g(x)=x^2+px+q$，$h(x)=(x-k)^2$ を用いて

$$f(x)=g(h(x))$$

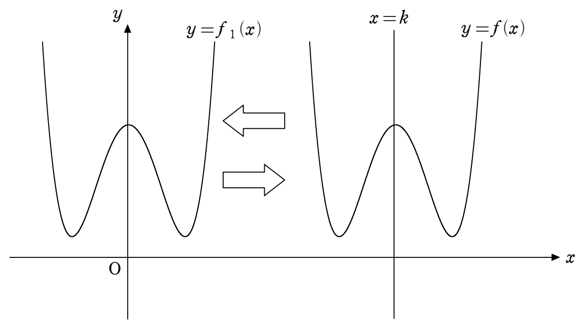
と表せることを意味し，題意は示された。

【総括】

(1) は根性でも何とかなります。

(2) は場当たり的に式変形しようものなら右往左往するでしょう。

【解 2】については



y 軸に重ねて，戻して

をやっただけで題意が示されてしまいました。

狐につままれたような感覚になりますね。